UNIVERSITE DE LILLE I
U.F.R. DE MATH.

ANALYSE FONCTIONNELLE

(résumé de cours et exercices)

MBEKHTA MOSTAFA

Chapitre I
Théorème de Baire et ses conséquences

§ 1- Espaces normés

Définition 1.1

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée <u>semi-norme</u> si elle satisfait les propriétés suivantes :

(1) $\forall\, x, y \in E, \qquad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

(2) $\forall\, x \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \qquad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x).$

Remarque :

(2) implique que si $x = 0$ alors $p(x) = 0$. La réciproque n'est pas vraie en général. D'où la définition suivante

Définition 1.2

Une seni-norme p est une <u>norme</u> si $p(x) = 0$ implique $x = 0$.

Définition 1.3

Soit E un espace vectoriel et P une norme sur E. Le couple (E, P) est appelé <u>espace normé</u>. On note généralement P par $\|\,.\,\|_E$ ou $\|\,.\,\|$.

Une distance entre deux élément x, y de E est alors définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Il est facile de vérifier que $d(x, y)$ ainsi définie est une <u>distance</u>, c'est à dire, elle vérifiée,

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in E,$

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \quad \forall\, x, y, z \in E.$

On notera qu'une distance définie par une norme est invariante par translation :

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \qquad \forall\, x, y, z \in E.$$

Ainsi un espace normé est un espace métrique.

Une <u>suite de Cauchy</u> dans un espace métrique est une suite (x_n) vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Un espace métrique est <u>complet</u> si toute suite de Cauchy est convergente.

Un espace normé complet est un <u>espace de Banach</u>.

Exemples

(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact, $K \subsetneq \Omega$. Si $f \in C(\Omega) = \{$ fonctions continues sur Ω $\}$, P_K définie par $P_K(f) = \sup\{|f(x)|, x \in K\}$ est une semi-norme sur $C(\Omega)$.

Si $\Omega = K$ est compact alors $P_K(f) = \|f\|_\infty$ est une norme.

(2) Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, pour $p \geqslant 1$ $x \longrightarrow \|x\|_p = (\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|^p)^{1/p}$ est une norme tel que $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$

(3) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leqslant p < \infty$$

et $\|f\|_\infty = \text{sup.ess}_{x \in \Omega} |f(x)|$ si $f \in L^\infty(\Omega) = \{f$ ess.bornée sur Ω, pour la mesure de Lebesgue$\}$, sont des normes.

(4) $\ell^p = \{ x = (x_n) \subsetneq \mathbb{C} ; \sum_{n \geqslant 1} |x_n|^p < \infty \}$, $1 \leqslant p < \infty$. Alors pour $x \in \ell^p$ $\|x\|_p = (\sum_{n \geqslant 1} |x_n|^p)^{1/p}$ est une norme.

Et, si $x \in \ell^\infty = \{x = (x_n) \subsetneq \mathbb{C} ; (x_n)$ bornée$\}$, alors $\|x\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1}\{ |x_n| \}$est une norme.

Remarque

(2), (3) et (4) donnent des exemples d'espace de Banach. Si dans (1) $\Omega = K$, compact, alors $C(\Omega)$ est un espace de Banach.

Remarque

Soit (P_n) une suite croissante de semi-normes sur E tel que :

si $(\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = 0)$ alors $x = 0$.

On définit alors une distance sur E par :

$$d(x, y) = \sum_{n \geqslant 0} (1/2)^n P_n(x-y)/(1+P_n(x-y))$$

Exemple (important) "$C^\infty(\Omega)$"

(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une suite K_n de compacts dans Ω telle que $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$ et $\cup_{n\geq 1} K_n = \Omega$.

(2) Soit $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$

Notons, $D^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f / \partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n$

On pose, $P_n(f) = \sup\{ |D^\alpha f(x)|;\ |\alpha| \leq n \text{ et } x \in K_n\}$

Alors : P_n est une suite croissante de semi-normes sur $C^\infty(\Omega)$, vérifiant, si $(\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(x) = 0)$ alors $x = 0$. Ainsi, comme plus haut, $C^\infty(\Omega)$ est un espace métrique. On peut montrer qu'il est complet pour cette métrique.

§ 2 - Théorème de Baire

Théorème 2.1 (Baire)

Si (E, d) est un espace métrique complet, alors l'intersection de toute famille dénombrable de sous-ensembles ouverts denses dans E est dense dans E.

Remarque

(1) Un énoncé équivalent du Théorème 2.1 : "Si (E, d) est un espace métrique complet, alors la réunion de toute famille dénombrable de sous-ensembles fermés d'interieur vide est d'interieur vide".

(2) La conclusion du Théorème 2.1 est appelée la <u>propriété de Baire</u>. Un espace topologique qui admet cette propriété est dit <u>espace de Baire</u> (ou espace du seconde catégorie).

(3) Dans de nombreuses applications la propriété de Baire est utilisée sous la forme suivante : " Soit (E, d) un espace métrique complet non vide. Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés de E telles que $\cup_{n\geq 1} E_n = E$, alors il existe $n_o \geq 1$ tel que $\mathrm{int}(E_{n_o}) \neq \emptyset$.

Corollaire 2.2

Soit (E, d) un espace métrique complet. Alors

(1) Tout fermé de E est un espace de Baire,

(2) Tout ouvert de E est un espace de Baire.

§ 3- Conséquences du Théorème de Baire

Tout d'abord, soit E, F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$, une application linéaire (opérateur). Définissons sa norme par $\|T\| = \sup\{ \|T(x)\|_F/\|x\|_E \ ; \ x \in E \text{ et } x \neq 0\}$.

Si $\|T\| < \infty$, alors T est dit opérateur borné.

Notons $L(E, F)$ l'espace des opérateurs bornés de E dans F.

Remarque

(1) $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_F \ ; \ x \in E \text{ et } \|x\|_E = 1\}$.

(2) $\|T\|$ est le plus petit nombre tel que l'inégalité $\|T(x)\|_F \leqslant \|T\| \, \|x\|_E$ soit vérifiée $\forall \ x \in E$.

(3) $\|TS\| \leqslant \|T\| \, \|S\|$.

(4) $L(E, F)$ muni de sa norme, définie plus haut, est complet si et seulement si F est complet (voir Exercice Feuille II).

En particulier, si E est normé alors le dual topologique de E, $E^* = \{$formes linéaires continues sur $E\}$, est un espace de Banach.

Théorème 3.1

Soit E, F deux espaces normés et T un opérateur de E dans F. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(a) T est borné

(b) T est continu dans E

(c) T est continu en un point de E

(d) T est continu en zéro.

Théorème 3.2 (Banach-Steinhaus)

Soit E un espace de Banach, F un espace normé et $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset L(E, F)$, ($I$ non nécessairement dénombrable).

On suppose : $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha(x)\| < \infty \quad \forall x \in E.$

Alors : $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| < \infty.$

"Autrement dit, $\exists c > 0$ telle que $\|T_\alpha(x)\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in E, \ \forall \alpha \in I$".

Corollaire 3.3

Soit E un espace de Banach, F un espace normé et $\{T_n\}_{n \geq 1}$ une suite d'opérateurs bornés de E dans F tels que $\forall x \in E, T_n(x)$ converge vers une limite notée $T(x)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Alors : (1) $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$

(2) T $L(E,F)$ (opérateur borné)

(3) $\|T\| \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \|T_n\|$.

Remarque

(1) Le Corollaire 3.3 dit que "une limite simple T d'une suite (T_n) d'opérateurs continus d'un Banach E dans un espace normé F est encore linéaire continue".

(2) $\|T_n - T\|$ ne tend pas vers zéro en général.

(3) Si E n'est pas complet alors le Théorème 3.2 est faux en général (voir Exo. Feuille 1).

§ 4- Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé

Définition 4.1

Soit E et F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

a) T est dite ouverte si il existe $\delta > 0$ tel que $B_F(0, \delta) \subset T(B_E(0, 1))$

b) T est dite presque ouverte si il existe $\delta > 0$ tel que $B_F(0, \delta) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$.

Proposition 4.2

Soit E et F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors, T est ouverte si et seulement si l'image par T de tout ouvert de E est un ouvert de F.

Théorème 4.3

Soit E un espace normé et F un espace de Banach. Si $T : E \longrightarrow F$ est une application linéaire surjective alors T est presque ouverte.

Théorème 4.4

Soit E un espace de Banach et F un espace normé. Si $T \in L(E, F)$ est presque ouverte alors T est ouverte.

Corollaire 4.5 (Théorème de l'application ouverte)

Soit E, F deux espaces de Banach. Si $T \in L(E, F)$ est surjectif, alors T est une application ouverte.

Corollaire 4.6 (isomorphismes de Banach)

Soit E, F deux espaces de Banach. Soit $T \in L(E, F)$ bijectif. Alors $T^{-1} \in L(F, E)$.
" Autrement dit, si T est continu bijectif alors T est bicontinu ".

Corollaire 4.7

Supposons que $(E, \| . \|_1 ; \| . \|_2)$ est un Banach pour les deux normes tels que $\exists c > 0, \ \| . \|_2 \leqslant c \| . \|_1$. Alors les deux normes sont équivalentes.

Corollaire 4.8 (Théorème du graphe fermé)

Soit E, F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire de E dans F telle que le graphe de T, $G(T) = \{(x, T(x)) ; x \in E\}$, soit fermé dans ExF. Alors T est continue.

Remarque

(1) La réciproque du corollaire précédent est toujour vraie, même pour T non linéaire.

(2) Par contre si T n'est pas linéaire, le corollaire précédent est faux. Exemple $E = \mathbb{R}$, $T(x) = x^{-1}$ et $T(0) = 0$. Le graphe de T est fermé, mais T n'est pas continue.

(3) Si E ou F n'est pas complet alors les résultats de ce paragraphe sont faux (voir Exercices Feuille 1).

(4) La réciproque du Corollaire 4.5 est vraie, même si E, F ne soient pas complets et T non continue.

I) Soit α un nombre réel strictement positif. Notons

$$\ell^1(\alpha) = \{(x_n) \in \mathbb{C}; \sum_{n\geq 1} |x_n|\alpha^{-n} < \infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1(\alpha)$,posons

$$\|x\|_\alpha = \sum_{n\geq 1} |x_n|\alpha^{-n}$$

1) Montrer que si $\alpha < \beta$ alors $\ell^1(\alpha)$ est inclus strictement dans $\ell^1(\beta)$.

2) Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur $\ell^1(\alpha)$

3) Montrer que $\ell^1(\alpha)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

II) Soit α un nombre strictement positif. Pour toute fonction continue f sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose

$$p_\alpha(f) = |f(0)| + \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Soit $\mathrm{Lip}_\alpha = \{f \in C[0,1] : p_\alpha(f) < \infty\}$.

1) Décrire Lip_α lorsque $\alpha > 1$.

Dans la suite on supposera que $0 < \alpha \leq 1$

2) Montrer que p_α est une norme sur Lip_α.

3) Montrer que Lip_α est complet pour cette norme.

4) Montrer que les inclusions $C^1[0,1] \subset \mathrm{Lip}_\alpha \subset \mathrm{Lip}_\beta \subset C[0,1]$ $(\beta < \alpha)$ sont strictes.

III) 1) Montrer qu'un espace normé est complet si et seulement si toute série absolument (ou normalement) convergente est convergente.

2) Soit $E = C[-1,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0], \\ nx & \text{si } x \in [0,1/n], \\ 1 & \text{si } x \in [1/n,1]. \end{cases}$$

a) Montrer que (f_n) est de Cauchy dans E. Etudier sa convergence dans E?

b) Former la suite $g_n = f_{n+1} - f_n$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \|g_n\|_1 < \infty$, par contre la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ ne converge pas dans E.

IV) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ et $H(D)$ l'ensemble des fonctions $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphes, on pose $N(f) = \sup_{|z|<\frac{1}{2}} |f(z)|$.

1) Montrer que N est une norme sur $H(D)$.

2) $H(D)$ muni de N est-il complet?

(considérer la suite des fonctions $f_n(z) = 1 + z + \ldots + z^n$).

V) Soit $E = C[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit

$$A_n = \{f \in E : \forall t \in [0,1]\ \exists s \in [0,1], |f(t) - f(s)| > n|t - s|\}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n est ouvert dans E.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n est dense dans E.

3) En déduire que l'ensemble des fonctions continues, nulle part dérivables, est dense dans E.

4) Donner un exemple d'une fonction continue nulle part dérivable.

VI) Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$.

1) Montrer que $Ker(T^n)$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Supposons que $\forall x \in E$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in Ker(T^n)$. Montrer que T est nilpotent.

VII) Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'est pas de dimension algébrique dénombrable (utiliser Baire).

VIII) Soit $Y = \ell^2$ et $X = \{(x_i) \in \ell^2 : x_i = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } i\}$.

Soit $T_n : X \to Y$ définit par

$$T_n((x_i)_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n, \\ nx_n & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Montrer que (T_n) vérifiée les hypothèses du Théorème de Banach-Steinhaus, par contre la conclusion de ce théorème n'est pas vérifée. Expliquer?

IX) 1) Soit E, F, G trois espaces normés et U une application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans G. Montrer que si E ou F est un Banach, U est continue.

2) Soit U la forme bilinéaire sur $\ell^1 \times \ell^1$ définie par $u(x, y) = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$ où $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell^1$.

a) Montrer que U est bien définie et est séparement continue, si on munit ℓ^1 de la topologie de ℓ^∞.

b) Montrer que U n'est pas continue sur $\ell^1 \times \ell^1$ muni de la topologie ℓ^∞. Expliquer?

(On peut prendre $(x_n^{(k)})$: $x_n^{(k)} = 1$ *si* $n \leq k$, $= 0$ *sinon.*)

X) Soit $x = (x_n)$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n \geq 0} x_n y_n$ soit convergente pour tout $y = (y_n) \in \ell^p$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

1) Pour tout entier N, calculer la norme de la forme linéaire U_N sur ℓ^p définie par $U_N(y) = \sum_{0 \leq n \leq N} x_n y_n$. (Utiliser l'inégalité de Holder).

2) En déduire que $x \in \ell^q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(Utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus).

3) Trouver la limite de $U - U_N$ quand N tend vers l'infini, où $U(y) = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$.

XI) Soit $X = C^1[0, 1]$ et $Y = C[0, 1]$, munis de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit $T : X \to Y$ défini par $Tf = f'$ et $G(T) = \{(f, Tf) : f \in X\}$ le graphe de T.

1) Montrer que $G(T)$ est fermé dans $X \times Y$.

2) Montrer que T n'est pas continue (on poura utiliser la suite $f_n \in X$ où $f_n(x) = x^n$). Expliquer?

XII) Soit $E = C[0, 1]$ et $\| \cdot \|$ une norme sur E telle que E muni de cette norme soit un espace de Banach. Supposons que quels que soient $f_n, f \in E$ tels que $\|f_n - f\| \to 0$ alors $\forall t \in [0, 1]$, $f_n(t) \to f(t)$.

Montrer que $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivatentes.

XIII) Soit $X = C[0,1], \|\cdot\|_\infty$ et $Y = C[0,1], \|\cdot\|_1$. Soit $I_d : X \to Y$ l'identité.

1) Montrer que I_d est bijective, continue.

2) Montrer que I_d^{-1} n'est pas continue (utiliser le suite $f_n(x) = x^n$).

3) En déduire que Y n'est pas complet.

XIV) Soit E un espace normé et M un sous-espace fermé de E. Soit $\pi : E \to E/M$ la surjection canonique. On pose $N(\pi(x)) = N(\tilde{x}) = \inf_{z \in M} \|x + z\| = \inf_{y \in \tilde{x}} \|y\|$.

1) Montrer que N est une norme sur E/M.

2) Montrer que π est continue et ouverte.

3) Montrer que si E est complet alors E/M est complet.

4) Formuler la réciproque de 3).

XV) Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$.
Soit le diagramme suivant:
où $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in E : Tx = 0\}$.
et $S(\tilde{x}) = Tx$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/\mathrm{Ker}(T) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

1) Montrer que S est bien définie, continue.

2) Supposons que T est surjective.

a) Montrer que S est une bijection.

b) En déduire une démonstration du "Théorème de l'application ouverte", en utilisant le "Théorème des isomorphismes de Banach". (Utiliser Ex. XIV.)

Chapitre II

Théorèmes de Hahn-Banach

§ 1- Forme analytique du théorème de Hahn-Banach

Rappelons d'abord l'axiome de choix

" Etant donné une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides d'un ensemble E, il existe une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'élément de E telle que $\forall i\in I,\ a_i \in A_i$".

Ou, ce qui revient au même :

" Tout produit d'ensembles non vides est non vide ".

On montre que l'axiome du choix est équivalente au Lemme de Zorn. Pour énoncer celui-ci, donnons d'abord quelques définitions :

Soit A un ensemble muni d'une relation d'ordre (partiel) " $\leqslant$ ". On dit qu'un sous-ensemble B de A est totalement ordonné si $\forall a,b\in B$, on a " $a\leqslant b$ ou $b\leqslant a$ ".

Soit B un sous-ensemble de A, on dit que $c\in A$ est un majorant de B si $\forall a\in B,\ a\leqslant c$.

On dit que $m\in A$ est un élément maximal de A si $\forall a\in A$ tel que $m \leqslant a$, on a $m = a$.

Enfin, on dit que A est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de A admet un majorant.

Lemme 1.1 (Zorn)

Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.

Remarque

Le lemme de Zorn, bien qu'il soit algébrique, a de nombreuses et trés importantes applications en Analyse.

Théorème 1.2 (Hahn-Banach, forme analytique)

Soit E un espace vectoriel réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soit P une sous-norme c'est à dire une application de $E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que (1) $P(x+y) \leqslant P(x) + P(y) \quad \forall x,y\in E$

$$(2)\ P(\lambda x) = \lambda P(x) \qquad \forall \lambda \geqslant 0,\ \forall x\in E.$$

Soit M un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur M ($f : M \longrightarrow \mathbb{R}$) telle que $\forall x\in M, \quad f(x) \leqslant P(x)$.

Alors, il existe une forme F sur E ($F : E \longrightarrow \mathbb{R}$) qui prolonge f c'est à dire

$$F(x) = f(x) \quad \forall x\in M \quad \text{et telle que} \quad F(x)\leqslant P(x) \quad \forall x\in E.$$

Corollaire 1.3

Soit un espace vectoriel complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et P une semi-norme. Soit M un sous-espace de E et $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$, une forme linéaire sur M telle que $|f(x)| \leqslant P(x) \quad \forall x \in M$.

Alors $\exists F : E \longrightarrow \mathbb{C}$, forme linéaire sur E telle que $F_{|M} = f$ et $|F(x)| \leqslant P(x) \quad \forall x \in E$.

Corollaire 1.4

Soit E un espace vectoriel normé. M un sous-espace vectoriel de E. Alors toute forme linéaire continue f sur M, admet un prolongement en une forme linéaire continue F sur E de même norme.

c'est à dire $F_{|M} = f$ et $\|F\| = \|f\|$.

Remarque

$\|f\| = \sup\{|f(x)| \; ; \; x \in M, \|x\| = 1\}$ et $\|F\| = \sup\{\|F(x)\| \; ; \; x \in E, \|x\| = 1\}$.

Théorème 1.5

Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E. Soit $x_0 \in E$ tel que $d(x_0, M) = d > 0$. Alors $\exists f \in E^*$ tel que $\|f\| = 1$, $f(M) = 0$ et $f(x_0) = d(x_0, M)$.

Corollaire 1.6

Soit $\{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$ une famille libre de E, alors $\exists\, f_1, \ldots\ldots, f_n$ dans E' tels que $f_j(x_k) = \delta_{jk}$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Et, si $x \in \langle x_1, \ldots\ldots, x_n \rangle$ (= sous-espace engendré par $\{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$) alors $x = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j(x) x_j$.

Corollaire 1.7

Tout sous-espace de dimension finie de E admet un complement topologique dans E.

Corollaire 1.8

Soit E un espace vectoriel normé. Alors :

(1) Si $x_o \neq 0$, alors $\exists f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x_o) = \|x_o\|$.

(2) Si $x_o \in E$, tel que $\forall f \in E^*$, $f(x_o) = 0$ alors $x_o = 0$.

(3) E^* sépare les points de E (càd, si $x \neq y$ alors $\exists f \in E^*$ tel que $f(x) \neq f(y)$).

Corollaire 1.9

Pour tout $x \in E$, on a : $\|x\| = \sup\{|f(x)| \; ; \; f \in E^* \text{ et } \|f\| \leqslant 1\}$

§ 2- Formes géométriques du théorème de Hahn-Banach

Définition 2.1

Soit H un sous-espace vectoriel de E, on dira que H est un hyperplan si codim $H = 1$.

Théorème 2.2

Soit E un espace vectoriel normé, alors :

(1) H est un hyperplan si et seulement si $\exists f$ forme linéaire, non identiquement nulle, telle que $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$ (noyau de f).

(2) a) un hyperplan H est ou bien fermé ou bien dense dans E.

b) il est fermé si et seulement si f est continue.

Définition 2.3

Un hyperplan affine est le translaté d'un hyperplan.

Une forme affine est la translatée d'une forme linéaire.

Remarque

H est un hyperplan affine si et seulement si $\exists f$ forme linéaire et $\exists c \in \mathbb{K}$, tel que

$$H = \{x \in E \; ; \; f(x) = c\}.$$

Théorème 2.4 (forme géométrique du théorème de Hahn-Banach)

Soit E un espace normé réel (resp. complexe) et Ω un ouvert convexe non vide (resp. équilibré) et soit V une variété affine ne rencontrant pas Ω. Alors il existe un hyperplan affine fermé H qui contient V et qui ne rencontre pas Ω.

Corollaire 2.5

Soit E un espace vectoriel normé, A un ouvert convexe non vide, B un convexe non vide tel que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe f forme linéaire continue sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$A \subset \{x \in E \ ; \ f(x) < \alpha\}$ et $B \subset \{x \in E \ ; \ f(x) \geqslant \alpha\}$.

Remarque

On dit que f sépare au sens large A et B.

Corollaire 2.6

Soit E espace vectoriel complexe normé. Soit A un ouvert convexe équilibré et non vide, et soit B un convexe non vide tel que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe f forme linéaire continue sur E et $\alpha > 0$ tels que $A \subset \{x \in E \ ; \ |f(x)| < \alpha\}$ et $B \subset \{x \in E \ ; \ |f(x)| \geqslant \alpha\}$.

Théorème 2.7 (2ème forme géométrique de Hahn-Banach)

Soit E un espace vectoriel réel (resp. complexe) normé. Soit A et B deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé (resp. +équilibré) et que B est compact. Alors il existe f forme linéaire continue sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha > 0$) et $\varepsilon > 0$ tels que $A \subset \{x \in E \ ; \ f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon\}$ et $B \subset \{x \in E \ ; \ f(x) \geqslant \alpha + \varepsilon\}$
(resp. $A \subset \{x \in E \ ; \ |f(x)| \leqslant \alpha - \varepsilon\}$ et $B \subset \{x \in E \ ; \ |f(x)| \geqslant \alpha + \varepsilon\}$).

Remarque

On dit que f sépare au sens strict A et B.

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

1994-95

ANALYSE FONCTIONNELLE 1 - Fiche 2

*****

— I —

Soit E un espace de Banach, M un sous-espace fermé de E.

(1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

a) M admet un complément topologique

b) $\exists P = P^2 \in L(E)$ tel que $P(E) = M$.

c) L'application $\pi : E \to E/M$ admet un inverse à droite continu.

(2) Montrer que si E/M est topologiquement isomorphe à ℓ^1, alors M admet un complément topologique. (Utiliser (1) c)).

— II —

Soit $E = C[0,1]$ muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$ et M le sous-espace de E engendré par les polynômes.

(1) Montrer qu'il existe F sous-espace de E tel que $E = M \oplus F$

(utiliser le Lemme de Zorn)

(2) Soit $\varphi : E \to \mathbf{C}$ définie par

$\varphi(f) = \sum_{i=0}^n i a_i \quad$ si $f(x) = \sum_{i=0}^n a_n x^n \in M$

et, $\quad \varphi(f) = 0 \qquad$ si $f \in F$.

Montrer que φ est une forme linéaire non continue de E dans $\mathbf{C}$.

(3) Soit $T : E \to E$ défini par $Tf = f - \varphi(f) g$ où $g \in F$ fixé, $g \neq 0$.

Montrer que T est linéaire bijectif non continu.

(4) Pour $f \in E$, notons $\| f \|_T = \| Tf \|_\infty$

(a) Montrer que $\| \, . \, \|_T$ est une norme sur E et E muni de cette norme est un espace de Banach.

(b) Les normes $\| \, . \, \|_T$ et $\| \, . \, \|_\infty$ sont-elles équivalentes?.

— III —

Soit E, F deux espaces normés avec $E \neq \{0\}$. Montrer que

F est complet $\Leftrightarrow L(E, F)$ est complet

— IV —

Soit E, F deux espaces de Banach. Soit $T : E \to F$ linéaire. Montrer que :

$$T \text{ est continue } \Leftrightarrow \forall f \in F^*, f \circ T \in E^*$$

(pour $\Leftarrow$" on peut utiliser le théorème de graphe fermé).

— V —

Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E. Il est clair que si $x_n \to x$ dans E, alors $\forall f \in E^*, f(x_n) \to f(x)$.

(1) Montrer qu'en général, la réciproque de cette proposition est fausse.

(2) Supposons que $\forall f \in E^*, f(x_n) \to f(x)$. Montrer alors que $x \in \overline{\langle x_n \rangle_{n\geq 0}}$ = l'adhérence du sous-espace engendré par $(x_n)_{n\geq 0}$.

— VI —

Soit $E = \ell^\infty$ et $C = \{(x_n) \text{ suite convergente }\}$. $C \subset E$ muni de la norme $\| \,.\, \|_\infty$.

Montrer que $f : C \to \mathbf{C}$ définie par $f(x) = lim_n x_n$ où $x = (x_n) \in C$

(1) Montrer que f est une forme linéaire continue. Calculer sa norme.

(2) En déduire que $(\ell^\infty)^* \neq \ell^1$.

— VII —

Soit E un espace normé et M un sous-espace de E.

(1) Montrer que $\overline{M} = \bigcap\{Ker(f); f \in E^* \text{ et } M \subset Ker(f)\}$

(2) En déduire que M est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E qui s'annule sur M s'annule sur E.

— VIII —

Soit $f, f_1, f_2, ...f_n$ des formes lineaires sur E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

(1) $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$ où $\alpha_k \in \mathbf{C}$

(2) $\exists \alpha > 0$ tel que $|f(x)| \leq \alpha \max_k |f_k(x)|, \forall x \in E$

(3) $\bigcap_{k=1}^n \ker(f_k) \subset \ker(f)$.

Ch III – Opérateurs continus et opérateurs compacts.

§1 - Opérateur adjoint.

Tout d'abord rappelons que si $T \in L(E, F)$, opérateur continu de E dans F, E et F sont des espaces normés, alors $\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T(x)\| < \infty$ et, pour tout $x \in E$, $\|Tx\| \le \|T\| \|x\|$.

Soit $E^* = L(E, \mathbf{C})$ l'espace des formes linéaires continues de E dans $\mathbf{C}$. Alors, on définie une dualité entre E etE^* par $< x, f > = f(x) \in \mathbf{C}$.

Et, on a $\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} | < x, f > | = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|$.

Remarque (cf Ch II corollaire 1.9):

$$\forall x \in E \ : \ \|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\| \le 1} | < x, f > | = \sup_{f \in E^*, \|f\| \le 1} |f(x)|.$$

Théorème 1.1 *Soit E et F deux espaces normés. Pour tout $T \in L(E, F)$, il existe un unique $T^* \in L(F^*, E^*)$ tel que*

$$< Tx, y^* > = < x, T^* y^* > \quad \forall x \in E, \forall y^* \in F^*.$$

En plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Remarques (1) T^* est appelé l'opérateur adjoint de T.

(2) $(T + S)^* = T^* + S^*$.

(3) $(ST)^* = T^* S^*$.

(4) Si T est inversible dans $L(E, F)$ alors T^* est inversible dans $L(F^*, E^*)$, et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

§2 - Spectre d'un opérateur continu.

Soit E un espace normé et $T \in L(E) = L(E, E)$. On note I l'identité, c.à.d. $I(x) = x$ pour tout $x \in E$, alors $\|I\| = 1$ (si $E \neq \{0\}$).

D'autre part, $\forall S \in L(E)$, $\|ST\| \le \|S\| \|T\|$ implique que

$\forall n \in \mathbf{N}$, $\|T^n\| \le \|T\|^n$.

Théorème 2.1 *Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$ tel que $\|T\| < 1$, alors $I - T$ est inversible dans $L(E)$. En plus*

$$(a) \qquad (I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k;$$

$$(b) \qquad \|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}.$$

Définition 2.2 *Soit $T \in L(E)$, notons*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \text{ est inversible dans } L(E)\}$$

et $\sigma(T) = \mathbf{C} \setminus \rho(T)$ (le complement de $\rho(T)$ dans $\mathbf{C}$). Alors

$\rho(T)$, s'appelle l'ensemble résolvant de T.

$\sigma(T)$, s'appelle le spectre de T.

Remarques

(1) Si dim $E < \infty$, alors $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ où

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas injective}\},$$

les valeurs propres de T.

(2) Si dim $E = \infty$ alors $\sigma_p(T)$ peut être vide.

Théorème 2.3 *Soit E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$. Alors $\rho(T)$ est ouvert dans $\mathbf{C}$ et l'application $\lambda \mapsto (T - \lambda I)^{-1}$ est analytique de $\rho(T)$ dans $L(E)$.*

Corollaire 2.4 *Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$, alors $\sigma(T)$ est une partie compacte non vide de $\mathbf{C}$, contenue dans la boule $\overline{B}(0, \|T\|)$ de $\mathbf{C}$.*

Lemme 2.5 *Soit $A, B \in L(E)$, alors*

1) AB et BA sont inversibles si et seulement si A et B sont inversibles;

2) en particulier si $AB = BA$ alors : AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.

Lemme 2.6 *Soit $T \in L(E)$ et $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$. Alors*

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$$

où $P(\sigma(T)) = \{z = P(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}$.

Posons $r(T) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}$, le rayon spectral de T.

Lemme 2.7 *Soit $T \in L(E)$ alors :*

$$r(T) < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$$

Théorème 2.8 *Si $T \in L(E)$ alors*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T)$$

§3 - Opérateurs compacts.

Les opérateurs compacts, et surtout leurs spectres, sont une généralisation naturelle de l'algèbre linéaire en dimension finie. Ce sont les opérateurs intégraux (étudiés par E. Fredholm, V. Volterra,...), premiers exemples d'opérateurs compacts, qui sont à l'origine de cette classe d'opérateurs. Les notions essentielles des opérateurs compacts ont été introduites par D. Hilbert en 1906. Onze ans après, F. Riesz publie une étude presque complète sur les opérateurs compacts. En 1930, J. Schauder rajoute quelques raffinements à la théorie en montrant que l'adjoint d'un opérateur compact est lui-même compact. La plupart des résultats de cette section sont dus à F. Riesz.

Soit E, F deux espaces normés et K un opérateur linéaire de E dans F.

Définition 3.1 *On dit que K est un opérateur compact si l'image par K de tout ensemble borné de E est un ensemble relativement compact dans F.*

Remarques

(1) Si K est compact alors K est borné.

(2) K est compact si et seulement si l'image par K de la boule unité de E est relativement compacte dans F.

(3) Puisque F est un espace métrique, K est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n\geq 1}$ de E , la suite $(Kx_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente dans F.

(4) Lorsque F est complet, il existe une caractérisation des opérateurs compacts en terme de précompacts. "K est compact si et seulement si $K(M)$ est précompact pour tout ensemble borné M de E".

Exemples

(1) Tout opérateur continu de rang fini (c.à.d. dim $\mathrm{Im}(T) < \infty$*) est compact*

(2) Les opérateurs integraux sont des opérateurs compacts

Proposition 3.2

(1) La somme de deux opérateurs compacts est un opérateur compact.

(2) Le produit d'un opérateur compact et d'un opérateur borné est un opérateur compact: si K est compact et si S et T sont continus et si SK et KT sont bien définis, alors SK et KT sont compacts.

Proposition 3.3 *Si E est normé et F est complet, alors toute limite en norme d'opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Corollaire 3.4 *L'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère fermé dans l'algèbre de Banach $L(E)$, E étant complet.*

Corollaire 3.5 *Toute limite en norme d'opérateurs continus de rangs finis est un opérateur compact.*

Définition *Soient X un espace topologique, Y un espace métrique de distance* d. *Un ensemble H d'applications de X dans Y est dit équicontinu au point a dans X, si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists U$ un voisinage de a dans X tel que* $\mathrm{d}(f(a), f(x)) \leq \epsilon \; \forall x \in U$ *et* $\forall f \in H$. *Il est dit équicontinu sur $K \subseteq X$ s'il est équicontinu en tout point de $K \subseteq X$.*

Remarque *Si E, F sont des espaces normés, alors tout ensemble borné de $L(E, F)$ est équicontinu sur E.*

Théorème *(Ascoli) Soit X un ensemble compact, $C(X)$ l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur X, muni de la norme uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$. Pour qu'une partie H de $C(X)$ soit relativement compacte dans $C(X)$, il faut et il suffit qu'elle soit bornée dans $C(X)$ et qu'elle soit équicontinue de X dans $\mathbf{C}$.*

Théorème 3.6 *Soient E et F deux espaces normés et $K \in L(E,F)$. Alors*

K compact $\Longrightarrow K^*$ compact.

(Si F est complet alors :K^* compact $\Longrightarrow K$ compact).

§4 - Opérateur $I - K$, avec K compact.

Lemme 4.1 (F.Riesz) *Soit M un sous-espace fermé d'un espace normé E, tel que $M \neq E$. Alors $\exists x \in E$ tel que*

$$\|x\| \leq 1 \ ; \ \mathrm{d}(x,M) \geq \frac{1}{2}.$$

Théorème 4.2 (F. Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé tel que $B(0,1)$ soit compact, alors E est de dimension finie.*

Théorème 4.3 *Soit E un espace normé et $K \in L(E)$ compact. Posons $T = I - K$. Alors:*

(1) Le noyau de T est de dimension finie (dim ker *(T)* $< \infty$)*;*

(2) $\mathrm{Im}(T)$ est fermé et codim Im *(T)* $< \infty$.

Remarque *Soit K compact et $T = I - K$, alors*

$$\forall n \geq 0 \ \ I - T^n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k K^k.$$

En utilisant la proposition 3.2, on voit que $I - T^n$ est compact. Donc, on peut appliquer le théorème précédent à l'opérateur $T^n = I - (I - T^n)$.

Corollaire 4.4 *Soit E un espace normé et soit $K \in L(E)$ compact et soit $T = I - K$. Alors pour tout $n \geq 1$,*

(1) dim ker *$(T^n) < \infty)$;*

(2) $\mathrm{Im}(T^n)$ est fermé et codim Im *(T^n)* $< \infty$.

Définition 4.5 *Soit E un espace vectoriel et soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-espaces croissante ou décroissante (par rapport à l'inclusion). La suite $(E_n)_{n\geq 1}$ est dite stationnaire s'il existe un entier k tel que $E_n = E_{n+1}$ pour tout $n \geq k$.*

Théorème 4.6 *Soit E un espace normé et soit $K \in L(E)$ compact et soit $T = I - K$. Alors les suites $(Ker(T^n))_{n\geq 1}$ et $(Im(T^n))_{n\geq 1}$ sont stationnaires.*

Corollaire 4.7 *Soit E un espace normé et soit $K \in L(E)$ compact et soit $T = I - K$. Alors il existe $p \geq 1$ tel que*

$$E = \mathrm{Ker}(T^p) \oplus \mathrm{Im}(T^p).$$

Corollaire 4.8 *Soit E un espace normé et soit $K \in L(E)$ compact et soit $T = I - K$. Alors il existe deux sous-espaces fermés M et N de E tel que $E = M \oplus N, T(M) = M, dim N < \infty$, $T(N) \subseteq N$ et la restriction de T à N est nilpotente.*

Corollaire 4.9 *Soit E un espace normé et soit $K \in L(E)$ compact et soit $T = I - K$. Alors*

$$\dim(Ker(T)) = codim(Im(T)).$$

Remarques *(1) Soit K compact et $T = I - K$ alors :*

$$\mathrm{Ker}(T) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(T) = E.$$

(2) "alternative de Fredholm" - Soit K un opérateur compact alors l'équation $x - Kx = y$ admet une solution unique pour tout $y \in E$ si et seulement si l'équation homogène $x - Kx = 0$ admet comme seule solution $x = 0$.

§5 - Spectre d'un opérateur compact.

Théorème 5.1 *Soit E un espace de Banach et soit $K \in L(E)$ un opérateur compact alors*

(1) $0 \in \sigma(K)$ si $\dim E = \infty$;

(2) $\forall \lambda \in \sigma(K)$, $\lambda \neq 0$, est une valeur propre de K;

(3) $\sigma(K)$ est un compact au plus dénombrable, n'admettant pas d'autre point d'accumulation que zéro.

Corollaire 5.2 *K compact alors*

(1) $\forall\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, $\exists N(\lambda)$ et $R(\lambda)$ deux sous-espaces fermés de E tel que $E = N(\lambda) \oplus R(\lambda)$; $(K - \lambda I)R(\lambda) = R(\lambda)$; $(K - \lambda I)N(\lambda) \subseteq N(\lambda)$ et $(K - \lambda I)_{|N(\lambda)}$ est nilpotent ;

(2) $\forall \mu \neq \lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, $N(\mu) \subseteq R(\lambda)$.

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

1994-95

ANALYSE FONCTIONNELLE 1 - Fiche 3

*****

— I —

Soit E un espace vectoriel et T une application linéaire de E dans E et $d \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que :

a) $Ker(T^d) = Ker(T^{d+1}) \iff Im(T^d) \cap Ker(T) = 0 \iff \forall n \geq 0, Ker(T^d) = Ker(T^{d+n})$;

b) $Im(T^d) = Im(T^{d+1}) \iff Im(T) + Ker(T^d) = E \iff \forall n \geq 0, Im(T^d) = Im(T^{d+n})$.

2) Soit p le plus petit entier tel que $Ker(T^p) = Ker(T^{p+1})$ et soit q le plus petit entier tel que $Im(T^q) = Im(T^{q+1})$. Supposons que p et q existent, montrer alors que $p = q$ et $E = Im(T^p) \bigoplus Ker(T^p)$.

— II —

1) Soit E un espace normé et $GL(E) = \{T \in L(E); T^{-1} \in L(E)\}$. Montrer que si E est complet alors $GL(E)$ est ouvert dans $L(E)$ et que l'application $T \mapsto T^{-1}$ de $GL(E)$ dans $GL(E)$ est continue.

2) Soit $E = \{(x_n); x_n = 0$ sauf pour un nombre fini de n$\}$ muni de la norme $\|.\|_p$ et

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Montrer que $\forall \varepsilon > 0, I - \varepsilon T$ n'est pas surjective.

En déduire que $GL(E)$ n'est pas ouvert dans $L(E)$.

— III —

Soit $E = l^2$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$. Soit $T : l^2 \to l^2$ défini par :

$$(x_n)_n \to (\lambda_n x_n)_n$$

1) Montrer que T est linéaire, continue et calculer sa norme.

2) Montrer que : si $(|\lambda_n|)_{n \geq 1}$ est minorée par un nombre strictement positif alors T est bijective.

Calculer T^{-1} et sa norme.

3) On suppose que l'un des λ_n est nul. Montrer que T n'est ni injective, ni surjective et que $\overline{Im(T)} \neq E$.

4) On suppose que $\forall n \geq 1$, $\lambda_n \neq 0$ et $inf_{n \geq 1} |\lambda_n| = 0$. Montrer que T est injective mais non surjective avec $\overline{Im(T)} = E$

— IV —

Soit $E = l^2$ et $T : l^2 \to l^2$ défini par :

$$(x_n)_n \to (y_n)_n$$

où $y_n = 0$ si $n \neq 1$ et $y_1 = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n}$.

5) Montrer que $T \in L(E)$, si E est muni de la norme $\|.\|_2$.

6) Montrer que si E est muni de la norme $\|.\|_\infty$ alors $T \notin L(E)$

— V —

Soit $E = C[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $T \in L(E)$ définit par :

$$Tf(x) = \int_0^1 xf(t)dt \text{ pour } f \in E.$$

1)Calculer la norme de T ainsi que la limite de $\|T^n\|^{1/n}$ quand n tend vers l'infini.
2) Calculer le spectre de T et l'opérateur résolvant de T.

— VI —

Soit E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E,F)$.

1) Montrer que : T est injective à image fermée si et seulement si $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|Tx\| \geq \alpha \|x\|$.

2) En déduire que l'ensemble des applications linéaires injective à image fermée est ouvert dans $L(E,F)$

— VII —

Soit $E = C([0,1])$ et pour $f \in E$, on définit $Tf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt$ où

$$K(.,.) \in C([0,1] \times [0,1])$$

1) Montrer que $T \in L(E)$.

2) Donner une majoration de $\|T^n\|$ pour $n \geq 1$ en fonction de $M = \max_{0\leq x,t \leq 1} |K(x,t)|$ et de n.

3) En déduire $\sigma(T)$.

— VIII —

Soit α un nombre réel strictement positif. Notons (voir Feuille No1, Exo.I)

$$\ell^1(\alpha) = \{(x_n) \in \mathbf{C}; \sum_{n\geq 1} |x_n| \alpha^{-n} < \infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1(\alpha)$,posons

$$\|x\|_\alpha = \sum_{n\geq 1} |x_n| \alpha^{-n}$$

Soit $T : \ell^1(\alpha) \to \ell^1(\alpha)$ défini par

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

1) Montrer que $T \in L(\ell^1(\alpha))$ et calculer la norme de T.
2) Calculer $\sigma(T)$.

— IX —

1) Soit $E = C^1[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty^1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $F = C[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty$. Montrer que l'injection canonique $T : E \hookrightarrow F$ est compacte.

2) Montrer que l'injection $T : Lip_\alpha \to C[0,1]$ est compacte $\forall \alpha \in]0,1]$ (voir Feuille No 1, exo.II).

— X —

Soit $E = C[0,1]$ et $K(.,.) \in C([0,1] \times [0,1])$.
Soit $T : E \to E$ défini par

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt$$

Montrer que T est compact.

— XI —

Soit E un espace de Banach, $T, K \in L(E)$ avec K compact. Soit $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \sigma(T+K)$, notons $S = (T + K - \lambda_0 I)^{-1}$.
1) Montrer que $Ker(T - \lambda_0 I) = Ker(I - SK)$.
2) En déduire que λ_0 est une valeur propre de T.
3) En déduire que

$$\sigma(T) = [\cap_{K \in K(E)} \sigma(T+K)] \cup \sigma_p(T)$$

où $K(E)$ est l'espace des opérateurs compacts et $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T.

— XII—

Soit E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E,F)$, compact. Montrer que si $Im(T)$ est fermée dans F alors $\dim Im(T) < \infty$.

— XIII —

1) Montrer qu'en général pour $A, B \in L(E)$, E Banach, $AB = I$ n'implique pas $BA = I$.
2) Montrer que si $A = I - K$ avec K compact alors $AB = I$ si et seulement si $BA = I$.

Ch IV Espaces de Hilbert

§1 - Préliminaires

Définition 1.1 Soit H un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, on appelle *produit scalaire* sur H, une application $x, y \mapsto (x, y)$ de $H \times H$ dans $\mathbf{C}$ satifaisant aux conditions suivants:

a)
$$(x, x) \geq 0 \ \forall x \in H \ ; \text{ et } (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

b)
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \ ; \ (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \ \forall x, y, z \in H \ \forall \lambda \in \mathbf{C}$$

c)
$$(y, x) = \overline{(x, y)} \ \forall x, y \in H$$

Remarque de b) et c), on déduit: $\forall x_i, y_j \in H$, $\forall \lambda_i, \mu_j \in \mathbf{C}$:

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\mu_j} (x_i, y_j)$$

Muni d'un produit scalaire, H est dit un *espace préhilbertien.*

Posons $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} \ \forall x \in H$.

Théorème 1.2 Soit H espace préhilbertien, on a:

a) (Loi du parallélogramme)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ \forall x, y \in H$$

b) (Théorème de Pythagore)

$$(x, y) = 0 \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

c) (Loi de polarisation):

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \ \forall x, y \in H$$

d) (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$|(x, y)| \leq \|x\|.\|y\| \ \forall x, y \in H$$

Et on a: $|(x,y)| = \|x\|.\|y\| \iff x, y$ sont liés.

e) $\|\cdot\| : x \in H \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}^+$ est une norme sur H.

Si $x_n \to x, y_n \to y$ dans H alors $(x_n, y_n) \to (x, y)$ dans $\mathbf{C}$.

Remarque 1) Si H est complet pour la norme $\|\cdot\|$, H est dit un *espace de Hilbert*.

2) e) du théorème précédent montre que le produit scalaire est continu.

Exemples

1) $\mathbf{C}^n$, muni du produit scalaire

$$(z, w) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i} \text{ où } z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \text{ et } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

est un espace de Hilbert.

2) $L^2(\Omega, \mu)$, muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_\omega f.\overline{g} \mathrm{d}\mu$$

est un espace de Hilbert.

3) $\ell^2 = \{(x_n) : \sum_{n \geq 1} |x_n|^2 < \infty\}$, muni du produit scalaire

$$(x, y) = \sum_{n \geq 0} x_n \overline{y_n} \text{ où } x = (x_n) \text{ et } y = (y_n)$$

est un espace de Hilbert.

4) $E = C([0,1])$ muni du produit scalaire de $L^2([0,1])$:

$$(f, g) = \int_{t=0}^{1} f(t)\overline{g(t)} dt$$

est un espace préhilbertien mais pas complet (voir exercises).

§2 - Théorème de la projection

Théorème 2.1 Soit A un ensemble convexe, fermé (resp. complet) non vide d'un espace de Hilbert (resp. préhilbertien) H. Alors pour chaque $x \in H$, il existe un unique $y \in A$ tel que

$$\|x - y\| = \mathrm{d}(x, A).$$

Remarque y est dit la projection de x sur A et on note $y = P_A(x)$.

Proposition 2.2: Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a:

$$\|x - y\| = \mathrm{d}(x, A) \iff \mathrm{Re}(x - y, z - y) \leq 0 \ \forall z \in A.$$

Définition 2.3 Soit $x, y \in H$, x est dit *orthogonal* à y si $(x, y) = 0$ (et on note $x \perp y$).

Un ensemble A de H est dit *orthogonal* à un ensemble B de H si $x \perp y \ \forall x \in A, \forall y \in B$.

L'orthogonal de $A \subseteq H$ est l'ensemble

$$\{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall y \in A\};$$

et se note $A^{\perp}$.

Remarque 1) Si $A \subseteq H$ un sous-ensemble de H alors $A^{\perp}$ est un sous-espace fermé de H;

2) $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$.

Théorème 2.4 Soit H un espace de Hilbert, on a:

a) $(x, y) = 0 \iff \|y\| \leq \|\lambda x + y\|, \ \forall \lambda \in \mathbf{C}$.

b) Soit M un sous-espace fermé de H, alors $M = (M^{\perp})^{\perp}$ et $H = M \oplus M^{\perp}$.

Remarque 1) L'application $P_M : x \mapsto x_1 = P_M x$ est une application lineaire continue telle que $P_M^2 = P_M$ et $\|P_M\| = 1$ (si $M \neq 0$).

P_M est la *projection orthogonale* sur M.

2) Les Théorèmes 2.1 et 2.4 sont faux si H n'est pas un Hilbert (voir exercices).

§3 - Suites orthonormales et bases Hilbertiennes.

Définition 3.1 $A \subseteq H$ est dit un *ensemble orthogonal* de H si l'on a

$$x, y \in A, x \neq y \Longrightarrow (x, y) = 0.$$

Un ensemble orthogonal A de H est dit un *ensemble orthonormal* de H si $\|x\| = 1, \ \forall x \in A$.

A est dit *total* dans H si le sous-espace vectoriel fermé engendré par A est égal à H.

Un ensemble orthonormal et total dans H est dit une *base orthonormale* de H.

Théorème 3.2 Soit $\{e_1, e_2, \ldots,\}$ un ensemble orthonormal de H, alors pour tout $x \in H$, on a:

5) $\sum_{k\geq 1} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$ (*inegalité de Bessel*)

2) $\sum_{k\geq 1}(x, e_k).e_k$ converge

3) $\sum_{k\geq 1} \lambda_k e_k$ converge si et seulement si $\sum_{k\geq 1} |\lambda_k|^2 < \infty$ (c'est à dire $(\lambda_k) \in \ell^2$)

4) Si $y = \sum_{k\geq 1} \lambda_k e_k$, alors $\lambda_k = (y, e_k)$.

Théorème 3.3 Soit $\{e_1, e_2, \ldots,\}$ un ensemble orthonormal dans H, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\{e_k\}_{k\geq 1}$ est une base orthonormale dans H

(ii) si $(x, e_k) = 0\ \forall k \geq 1$, alors $x = 0$

(iii) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{k\geq 1} |(x, e_k)|^2$ (*identité de Parseval*)

(iv) $\forall x, y \in H$, $(x, y) = \sum_{k\geq 1}(x, e_k)\overline{(y, e_k)}$ (*formule de Plancherel*)

Remarque Si $\{e_1, e_2, \ldots\}$ est une base orthonormale de H, alors $\forall y \in H, \exists \lambda_k \in \mathbf{C}$ tel que $y = \sum_{k\geq 1} \lambda_k e_k$. D'aprés le théorème 3.2(4) $\lambda_k = (y, e_k)$, s'appelle le *coefficient de Fourier d'ordre k* de y dans la base (e_n).

Exemples

1) $\{e_n\}$ est une base orthonormale de ℓ^2, où

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0, \ldots), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$$

2) $\{f_n\}_{n\in \mathbf{Z}}$ est une base orthonormale pour $L^2([-\pi, \pi])$, où

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}.$$

2') $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\}_{n\in \mathbf{N}}$ est de même une base de $L^2([-\pi, \pi])$.

3) Les polynômes de Legendre P_n forment une base orthogonale dans $L^2([-1,1])$, où

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n \ \forall n \in \mathrm{N}$$

Remarque un espace de Hilbert est dit *séparable* s'il existe une suite (donc dénombrable) totale dans H

par le "théorème de Gram-Schmidt", s'il existe une suite totale dans H, alors on peut construire, à partir de cette suite, une base orthonormale dans H.

Ile existe des espace de Hilbert non séparable

Exemple "les fonctions presque-periodiques"

Soit $H = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue, limite uniforme de polynôme trigonometrique $\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$ with $\lambda_k \in \mathbf{R}\}$ on munit H par le produit scalaire

$$(f,g) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Alors $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ est une base orthonormale non dénombrable dans H.

Théorème 3.4 (*Gram-Schmidt*) Pour tout ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\}$ dénombrable linéairement indépendent de H, il existe un ensemble orthonormal $\{e_n\}$ de H tel que, $\forall n \geq 1$, e_n est un combinaison linéaire de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et x_n est un combinaison linéaire de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

1994-95

ANALYSE FONCTIONNELLE 1 - Fiche 4

*****

— I —

Soit $E = C^1[0,1]$ l'espace de Banach muni de la norme $\|f\|_\infty^1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $F = C[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty$.

Le but de l'exercice est de montrer que si M est un sous-espace de E, fermé dans F alors M est de dimension finie.

1) Montrer que si M est fermé dans F alors M est fermé dans E.

2) Montrer que les normes $\|.\|_\infty^1$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes dans M.

3) En déduire que la dimension de M est finie

— II —

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $A^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); f \text{ holomorphe dans } \Omega\}$

1) Montrer que si $\overline{B}(z,r) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - z| \leq r\} \subset \Omega$ alors

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{B}(z,r)} f(\lambda)d\lambda \quad \text{pour tout } f \in A^2(\Omega);$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue dans le plan.

2) En déduire que $|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r}\|f\|_2$

3) Montrer que $A^2(\Omega)$ muni du produit scalaire de $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

4) Soit $z \in \Omega$ et $F_z : f \longmapsto f(z)$ pour $f \in A^2(\Omega)$

i) Montrer que F_z est une forme linéaire continue sur $A^2(\Omega)$. En déduire qu'il existe $K_z \in A^2(\Omega)$ tel que

$$f(z) = \int_\Omega f(\lambda)\overline{K_z(\lambda)}\,d\lambda \text{ pour tout } f \in A^2(\Omega)$$

ii) On pose $K_\Omega(z,\lambda) = K_z(\lambda)$ pour tout $(z,\lambda) \in \Omega \times \Omega$

a) Montrer que $K_\Omega(z,\lambda) = \overline{K_\Omega(\lambda,z)}$

b)Soit e_n une base orthonormale de $A^2(\Omega)$.
Montrer que $K_z = \sum_{n\geq 0} \overline{e_n(z)} e_n$

5) Soit $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$

a) Montrer que la suite $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$, $n = 0,1,2,\ldots$ est une base orthonormale de $A^2(\Omega)$.

b) Calculer explicitement K_D.

— III —

1) Soit M et N deux sous-espaces orthogonaux d'un espace de Hilbert. Montrer que $M \oplus N$ est fermé si et seulement si M et N sont fermés.

2) Soit $H = l^2$ et E = l'adhérence du sous-espace engendrée par $\{e_{2n}\}_{n\geq 1}$ et F = l'adhérence du sous-espace engendré par $\{e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1}\}_{n\geq 1}$ où $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est la base canonique de H.

1) Montrer que $E \cap F = \{0\}$.

2) Montrer que $E \oplus F$ n'est pas fermé dans H.

— IV —

Soit $E = C([a,b])$ muni du produit scalaire induit par $L^2([a,b])$. Soit $c \in]a,b[$ et $F_c = \{f \in E; f_{|[a,c]} = 0\}$.

1) Calculer $F_c^{\perp}$.

2) Montrer que $F_c \oplus F_c^{\perp} \neq E$.

3) Expliquer.

— V —

Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_{\infty}$.

Soit $C = \{f \in E; f(\frac{1}{2}) = 1\}$.

1) Montrer que C est convexe fermé et calculer $d(0,C)$.

2) Caractériser $\{f \in C; d(0,C) = d(0,f)\}$, conclure.

— VI —

1) Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire. Montrer que si $\forall x \in H$, $\forall y \in H$, $(Tx, y) = (x, Ty)$ alors T est continue. (Utiliser le théorème du graphe fermé).

2) Soit $H = \{(x_n)_{n\geq 1}; x_n = 0$ sauf un nombre fini de $x_n\}$ muni du produit scalaire

$$(x_n, y_n) = \sum_{n\geq 1} x_n \overline{y_n}$$

Soit $T : H \longrightarrow H$ défini par $T(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, 2x_2, ..., nx_n, ...)$.

Montrer que T vérifié $(T(x_n), (y_n)) = ((x_n), T(y_n))$ mais T n'est pas continu, expliquer.

Chapitre V

DECOMPOSITION SPECTRALE
DES OPERATEURS NORMAUX COMPACTS

§1 - Opérateurs continus dans un espace de Hilbert

Dans toute la suite H est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1 (F. Riesz)

Soit H un espace de Hilbert.

a) Pour toute forme linéaire continue $f : H \to \mathbb{C}$ il existe un point unique $y \in H$ tel que $f(x) = (x, y), \forall x \in H$; et $\|f\| = \|y\|$.

b) $\forall y \in H$; la fonction $f : H \to \mathbb{C}$; définit par $f(x) = (x, y) \forall x \in H$, est une forme linéaire continue et $\|f\| = \|y\|$.

Remarque :

Ce théorème montre que $H \cong H^*$ le dual topologique de H. Souvent, on identifie H à son dual.

Corollaire 1.2

Soit $T \in L(H)$, alors il existe un unique opérateur $T^* \in L(H)$ tel que $\forall x, y \in H$, $(Tx, y) = (x, T^*y)$ et $\|T\| = \|T^*\|$.

Définition 1.3

T^* s'appelle l'opérateur adjoint de T.

Théorème 1.4

Soient $T, S \in L(H), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors on a :

a) $I^* = I, (\lambda T + \mu S)^* = \overline{\lambda} T^* + \overline{\mu} S^*$

b) $(TS)^* = S^* T^*$

c) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

d) $T^{**} = T$

e) $\|T^*T\| = \|T\|^2 = \|TT^*\| = \|T^*\|^2$

f) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^{\perp}; \mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^{\perp}; \overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Ker}(T^*)^{\perp}$ et $\overline{\mathrm{Im}(T^*)} = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$.

g) M sous-espace de H, alors : $T(M) \subseteq M \Rightarrow T^*(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp} \Rightarrow T(\overline{M}) \subseteq \overline{M}$.

Remarque

1) $f) \Rightarrow \quad \begin{cases} T\text{injectif} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T^*) \text{ est dense dans} H \\ T^*\text{injectif} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) \text{ est dense dans} H \end{cases}$

2) $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.

3) g) implique que si M est un sous-espace fermé alors $T(M) \subseteq M \Leftrightarrow T^*(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$

Définition 1.5

- T est dit normal si $TT^* = T^*T$
- T est dit autoadjoint (Symétrique, Hermitien) si $T = T^*$
- T est dit unitaire si $TT^* = I = T^*T$.
- T est dit positif si $(Tx, x) \geq 0, \forall x \in H$

Exemple :

$T = 2iI$ est normal, mais non autoadjoint ni unitaire. En effet,

$$(2iI)^* = -2iI, (2iI)^*(2iI) = (2iI)(2iI)^* = 4I.$$

Théorème 1.6

a) T est normal $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall x \in H$.

b) Pour chaque T normal, on a :

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*); \mathrm{Ker}(T^2) = \mathrm{Ker}(T)$.

(2) $\forall.\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda} I)$.

(3) $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \perp \mathrm{Ker}(T - \mu I)$ si $\lambda \neq \mu$.

Lemme 1.7

Soit $T \in L(H)$, normal alors

(1) $\forall n \geq 0, \|T^n\| = \|T\|^n$

(2) $r(T) = \|T\|$ où $r(T)$ est le rayon spectral de T.

Corollaire 1.8

1) Si T est normal avec $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.

2) Si T est normal compact alors $\exists \lambda$ valeur propre de T telle que $|\lambda| = \|T\|$, (c'est la plus grande valeur propre de T).

§2 - Décomposition spectrale des opérateurs normaux compacts

Tous les résultats qu'on a vus sur les opérateurs compacts dans les Banach (cf. Ch III) restent valables dans les espaces de Hilbert.

Théorème 2.1 (Rappel, cf. Ch III))

$T \in L(H)$, compact alors :

(1) $0 \in \sigma(T)$ si $\dim H = \infty$.

(2) $\forall \lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$, est une valeur propre avec $\dim\mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \mathrm{codim} R(T - \lambda I) < \infty$.

(3) $\sigma(T)$ est au plus dénombrable, n'admettant pas d'autre point d'accumulation que zéro.

Théorème 2.2

Soit $T \in L(H)$ alors :

T est compact $\Leftrightarrow T$ est limite d'opérateur de rang fini.

Théorème 2.3

Soit T un opérateur normal compact, alors :

$$Tx = \sum_{k \geq 0} \lambda_k (x, \varphi_k) \varphi_k \quad \forall x \in H;$$

où $\{\lambda_n\}$ est une suite qui tend vers zéro et $\{\varphi_k\}$ est un système orthonormal.

Corollaire 2.4

Si T est normal, compact, alors il existe une suite orthonormale $\{\varphi_k\}$ de vecteurs propres de T tel que

$$\forall x \in H, x = x_0 + \sum_{k \geq 0} (x, \varphi_k) \varphi_k$$

où $x_0 \in \operatorname{Ker}(T)$. En plus

$$H = \overline{\oplus_{\lambda \in \sigma(T)} \operatorname{Ker}(T - \lambda I)}.$$

En particulier si $\operatorname{Ker}(T)$ est séparable alors H admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de T.

CHAPITRE VI

OPERATEURS INTEGRAUX, FORMULE DE TRACE

1 — Préliminaires

Soit l'espace de Hilbert $H = L^2[a,b]$ muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \text{pour } f,g \in H.$$

Soit $K(.,.) \in L^2([a,b] \times [a,b])$ alors l'application

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy \text{ pour } f \in H$$

est appelée **opérateur intégral de noyau** $K(.,.)$.

Théorème 1.1

(1) $T \in L(H)$ et $\|T\| \leq \|K\|_2$.

(2) T^* est un opérateur intégral de noyau $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

(3) T est compact.

Remarques :

(1) $T = 0$ si et seulement si $K(x,y) = 0 \quad \forall x,y \in [a,b]$

(2) $T = T^*$ autoadjoint si et seulement si $K(x,y) = \overline{K(y,x)} \quad \forall x,y \in [a,b]$

(3) Soit :

$$(T_1 f)(x) = \int_a^b K_1(x,y)f(y)\,dy$$

et

$$(T_2 f)(x) = \int_a^b K_2(x,y)f(y)\,dy$$

Alors T_1T_2 est un opérateur intégral, défini par :

$$(T_1T_2f)(x) = \int_a^b K_{12}(x,y)f(y)\,dy$$

où

$$K_{12}(x,y) = \int_a^b K_1(x,z)K_2(z,y)\,dz$$

Donc, T est normal si et seulement si

$$\int_a^b \overline{K(x,z)}K(y,z)dz = \int_a^b K(z,x)\overline{K(z,y)}\,dz \quad \forall x,y \in [a,b].$$

(4) T est compact normal alors :

$T \geq 0$ (c'est à dire $(Tf, f) \geq 0 \quad \forall f \in H$) si et seulement si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$ (c'est à dire les valeurs propres de T sont positives ou nulles).

(5) $\forall x, y \in [a, b], K(x, y) \geq 0 \not\Longleftrightarrow T \geq 0$.

Exemple :

Soit

$$K(x,y) \quad = \quad \begin{cases} y(x+1), & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ x(y+1), & 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et $(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy, \quad f \in L^2[0,1]$.

Alors : $\sigma(T) = \{0; 1; -\frac{1}{n^2\pi^2}, n \geq 1\}$.

On a $\forall x, y \in [0,1], K(x,y) \geq 0$ mais T n'est pas positif.

Théorème 1.2

Soit $K(.,.)$ continue sur $[a, b] \times [a, b]$ et T l'opérateur intégral associé à K.

Alors $T \geq 0$ si et seulement si $\forall x_1, \dots x_n$ suite fini de nombres vérifiant $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ et $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(x_i, x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

(Dans ce cas la fonction $K(.,.)$ est dite définie positive).

Théorème 1.3

Soit $K(.,.) \in L^2([a, b] \times [a, b])$ et T l'opérateur intégral associé à K. Supposons que T soit normal et $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ la suite des valeurs propres (répétées un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) de T.

Alors :

$$\|K\|^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2.$$

2 — Formule de Trace

Tout d'abord le théorème de Mercer.

Théorème 2.1 (Mercer)

Soit $K(.,.) \in C([a,b] \times [a,b])$. Supposons que l'opérateur intégral T associé à K soit ≥ 0.

Soit $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ et $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ les valeurs propres (répétées un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) et les vecteurs propres orthonormés associés à λ_j de T.

Alors : $\forall x, y \in [a,b]$,

$$K(x,y) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(y)}$$

la série converge absolument et uniformément (si elle est infinie) sur $[a,b] \times [a,b]$.

Théorème 2.2 (Formule de trace)

Soit $K(.,.) \in C([a,b] \times [a,b])$ et T l'opérateur intégral associé à K. Supposons que $T \geq 0$.

Alors

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j = \int_a^b K(x,x)dx,$$

où λ_j sont les valeurs propres (répétées un nombre de fois égal à leur ordre de multiplicité) de T.

Université des Sciences et Technologies de Lille
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

1994-95

ANALYSE FONCTIONNELLE 1 - Fiche 5

*****

— I —

Soit $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ un système orthonormé de $L^2[a,b]$.

Montrer que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$\sum_{n\geq 1} |\int_a^x \varphi_n(t)dt|^2 = x - a \quad \forall x \in [a,b].$$

(On pourra utiliser l'identité de Parseval et les fonctions en escaliers).

— II —

Soit H un espace de Hilbert et $(e_j)_{j\geq 1}$ une base orthonormale de H. Soit $(f_j)_{j\geq 1}$ une suite de vecteurs orthonormés de H. Le but du problème est de montrer que si $\sum_{j\geq 1} \|e_j - f_j\|^2 < \infty$ alors $(f_j)_{n\geq 1}$ une base orthonormale de H.

1) Soit $f_0 \in H$ orthogonal à $(f_j)_{j\geq 1}$.

Soit $N \geq 1$, posons $g_k = \sum_{j=1}^{N} (f_k, e_j)e_j \quad ; k = 0, 1, ..., N$

a) Montrer que $\{g_0, g_1, ..., g_N\}$ est lie.

b) En déduire qu'il existe $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N \in \mathbb{C}$ tel que $h = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k f_k$ soit orthogonal à e_j pour tout $j = 1, ..., N$.

2) Montrer que si $\sum_{j\geq 1} \|e_j - f_j\|^2 < \infty$ alors $(f_j)_{n\geq 1}$ une base orthonormale de H.

— III —

Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$.

a) Montrer que $\forall x, y \in H$.

$$(Tx,y) = \frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)+i(T(x+iy),x+iy)-i(T(x-iy),x-iy)]$$

b) En déduire que si $\forall x \in H$, $(Tx,x) = 0$ alors $T = 0$.

c) Montrer que : $\forall x \in H$, $(Tx,x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $T = T^*$. Et, dans ce cas $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

d) Montrer que si, $\forall x \in H$, $(Tx,x) \geq 0$ alors $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.

— IV —

Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$, avec $\|T\| \leq 1$.

1) Montrer que si $Tx = x$ alors $\|T^*x\| = \|x\|$.

En déduire que $T^*x = x$.

Notons : $H_T = \{x \in H; Tx = x\}$ et $H_{T^*} = \{x \in H; T^*x = x\}$

2) Montrer que $H_T = H_{T^*}$

3) Montrer que $H = H_T \oplus \overline{Im(I-T)}$

— V —

Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$.

1) Montrer que si $x \neq 0$ alors x est un vecteur propre de T si et seulement si $|(Tx,x)| = \|Tx\|.\|x\|$.

2) En déduire que T admet une valeur propre μ avec $|\mu| = \|T\|$ si et seulement si $\exists x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $|(Tx,x)| = \|T\|$.

3) En déduire que si $\alpha_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ et $\sum_{n\geq 1} \alpha_n^2 = 1$ alors $\sum_{n\geq 1} \alpha_n\alpha_{n+1} < 1$.

(On utilisera 2) avec $H = l^2$ et $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$).

— VI —

1) Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$, compact. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite infinie orthonormée de H alors $Tx_n \to 0$.

2) Supposons H separable et soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base de H. Soit $T \in L(H)$. Montrer que si $\sum_{n\geq 1} \|Te_n\|^2$ est convergente alors T est compact.

3) Soit $H = l^2$ et $T(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$ où $(x_1, x_2, \ldots) \in H$ et $\alpha_n \in \mathbb{C}$.

Montrer que : T est compact si et seulement si $\alpha_n \to 0$.

— VII —

Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$.

1) Montrer que si T est normal alors $\forall x \in H$, $\|Tx\|^2 \leq \|T^2 x\|.\|x\|$.

2) Montrer que si T est normal alors T^2 est compact si et seulement si T est compact.

3) Soit T compact , normal.

a) Montrer que T est autoadjoint si et seulement si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

b) Montrer que T est positif si et seulement si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$

— VIII —

Soit $H = L^2[0,1]$ et T l'application définie par $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$ si $x \in [0,1]$ et $f \in H$.

1) Calculer T^*, T^*T, TT^*.

2) Calculer le spectre de T^*T.

3) Calculer la norme de T^*T et en déduire la norme de T.

— IX —

Soit $H = L^2[0,1]$ et $T \in L(H)$ défini par

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$$

$\forall f \in H$ et $\forall x \in [0,1]$, avec

$$K(x,t) \quad \begin{cases} x(1-t) \text{ si } 0 \leq x \leq t \\ t(1-x) \text{ si } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Calculer le spectre de T et les fonctions propres de T.

b) En déduire la norme de T.

c) Etablir la formule

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)}{n^2} = \begin{cases} x(1-t), 0 \leq x \leq t \\ t(1-x), t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

d) Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.

— X —

Soit $H = L^2[0,1]$ et T défini par

$$Tf(x) = \int_0^1 e^{-|x-t|} f(t) dt$$

a) Calculer le spectre et les fonctions propres de T.

b) En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{1+\mu_n^2})^2$ où $\pm\mu_n$ sont les racines de l'équation $\operatorname{cotg} \mu = \frac{1}{2}(\mu - \frac{1}{\mu})$.

MAÎTRISE DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE FONCTIONNELLE 1

DS du 20/12/94

Durée : 4 heures - Sans documents

Exercice

Soit E, F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F telle que $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in E : Tx = 0\}$ soit fermé.

Soit le diagramme suivant:
où $\tilde{T}(\tilde{x}) = Tx; \quad \tilde{x} \in E/\mathrm{Ker}(T)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/\mathrm{Ker}(T) \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

1) a) Montrer que T est continue si et seulement si $\tilde{T}$ est continue.

b) Montrer que T est compacte si et seulement si $\tilde{T}$ est compacte.

2) Supposons T continue.

a) Montrer que si $\mathrm{Im}(T)$ est fermée alors l'application $\tilde{T} : E/\mathrm{Ker}(T) \longrightarrow \mathrm{Im}(T)$ est inversible.

b) En déduire que $\mathrm{Im}(T)$ est fermée si et seulement si $\exists \alpha > 0, \forall y \in \mathrm{Im}(T), \exists x \in E$ tel que $y = Tx$ et $\|y\| \geq \alpha \|x\|$.

Problème

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$. Posons pour $n \geq 1$,

$$M_n(T) = \frac{I + T + \ldots + T^{n-1}}{n}$$

I) 1) Montrer que si la suite $(M_n(T))_{n\geq 1}$ converge dans $L(E)$ alors $\frac{\|T^n\|}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

2) On va montrer qu'en général la réciproque dans 1) est fausse. Pour cela, soit $E = C[0,1], \|\cdot\|_\infty$ et $T : E \longrightarrow E$ défini par $(Tf)(x) = xf(x)$.

a) Montrer que $\frac{\|T^n\|}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

b) Montrer que la suite $(M_n(T))_{n\geq 1}$ ne converge pas dans $L(E)$.

II) Supposons que $M_n(T) \longrightarrow P$ quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $L(E)$.

1) Montrer que $(I-T)P = P(I-T) = 0$.

2) En déduire que $P^2 = P$.

3) Montrer que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(I-T) = \{x \in E; Tx = x\}$.

4) Montrer que $\mathrm{Im}(I-T) \subseteq \mathrm{Ker}(P)$ et, en utilisant le Théorème de Hahn-Banach, montrer que $\overline{\mathrm{Im}(I-T)} = \mathrm{Ker}(P)$.

5) En déduire que $E = \overline{\mathrm{Im}(I-T)} \bigoplus \mathrm{Ker}(I-T)$.

6) On veut montrer que $\mathrm{Im}(I-T)$ est fermée. Pour cela, posons $Y = \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$.

a) Montrer que $T(Y) \subseteq Y$.

b) Soit $S = T_{|Y}$, la restriction de T à Y. Montrer que $M_n(S) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $L(Y)$. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $I - M_N(S)$ soit inversible dans $L(Y)$.

c) En déduire que $I - S$ est inversible dans $L(Y)$ et que $\mathrm{Im}(I-T)$ est fermée.

III) Supposons maintenant que $\frac{\|T^n\|}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. On veut montrer que si $\mathrm{Im}(I-T)$ est fermée alors la suite $(M_n(T))_{n\geq 1}$ converge dans $L(E)$. Donc supposons que $Y = \mathrm{Im}(I-T)$ est fermé et posons $S = T_{|Y}$, la restriction de T à Y.

1) Montrer que $M_n(S) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ dans $L(Y)$ (Utiliser 2) de l'exercice).

2) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $I - M_N(S)$ soit inversible dans $L(Y)$.

3) En déduire que $I - S$ est inversible dans $L(Y)$ et que $\mathrm{Im}(I-T)^2 = \mathrm{Im}(I-T)$.

4) Montrer que $E = \mathrm{Im}(I-T) \bigoplus \mathrm{Ker}(I-T)$ et en déduire que la suite $(M_n(T))_{n\geq 1}$ converge dans $L(E)$.

IV) En déduire que si T est compacte alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(M_n(T))_{n\geq 1}$ converge dans $L(E)$;

(ii) $\frac{\|T^n\|}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Université des Sciences et Technologies de Lille

UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

MAITRISE DE MATHEMATIQUES

Analyse Fonctionnelle I

Examen du 21/1/95 - Durée 4 heures

Sans documents

Exercice

Soit E un espace normé et $\{f_1, f_2, ..., f_p\} \subset E^*$ une famille libre.

1) Montrer que l'application $T : E \longrightarrow \mathbb{C}^p$ définie par

$$Tx = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)) \quad \text{est surjective}$$

(utiliser le Théorème de Hahn-Banach).

2) En déduire qu'il existe $e_1, e_2, ..., e_p \in E$ tel que $f_j(e_k) = \delta_{jk}$ pour tout $j, k = 1, ..., p$

3) Montrer que le sous-espace engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ est un complément topologique de $N = \{x \in E;\ \ f_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, ..., p\}$ dans E.

Problème I

Soit H un espace de Hilbert et $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_j\}$ une famille orthonormée de H. Soit E le sous-espace engendré par $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_j\}$.

1) Soit l'application $P : H \longrightarrow H$ définie par $Px = \sum_{k=1}^{j} (x, \varphi_k)\varphi_k$, $x \in H$.

a) Montrer que $P \in L(H)$, $P^2 = P = P^*$ et calculer sa norme.

b) Montrer que $x \in E$ si et seulement si $Px = x$.

c) Calculer $\|Px\|^2$, $x \in H$

2) Soit $T \in L(H)$ normale.

a)Montrer que $\forall x \in H$, $\forall n \geq 1$, $\|T^n x\|^2 \leq \|T^{n-1}x\|\ \|T^{n+1}x\|$.

b) Montrer que si $Tx \neq 0$ alors $\forall n \geq 1$, $T^n x \neq 0$.

c) Montrer que si $Tx \neq 0$ alors la suite $(\frac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|})_{n\geq 1}$ est convergente quand $n \longrightarrow +\infty$

(on montrera qu'elle est croissante et majorée).

3) Supposons T normale compacte et soit $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ et $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres orthonormés associés à $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ de T.

a) Calculer $T^n x$, pour $x \in H$ et $n \geq 1$

(utiliser la décomposition spectrale de T).

b) Supposons que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_k| \geq ...$ et que si $\lambda_j \neq \lambda_k$ alors $|\lambda_j| \neq |\lambda_k|$. Notons E_1 le sous-espace propre associé à λ_1 et P_1 la projection orthogonale de H sur E_1.

Montrer que si $x \in H,\ P_1 x \neq 0$, alors $(\frac{\|T^n x\|}{|\lambda_1|^n})^2 \longrightarrow \|P_1 x\|^2$ quand $n \longrightarrow +\infty$

(Utiliser le fait que la dimension de E_1 est finie et 1)).

c) En déduire que $\frac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|} \longrightarrow |\lambda_1|$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

d) En déduire que si $x \in H$, $Tx \neq 0$ alors il existe $j_0 \geq 1$ tel que $\frac{\|T^{n+1}x\|}{\|T^n x\|} \longrightarrow |\lambda_{j_0}|$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Problème II

Soit $H = L^2[0,1]$ et $T \in L(H)$ définie par

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt \quad \forall f \in H \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1]$$

où

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{sh(x)sh(1-t)}{sh(1)} & \text{si } 0 \leq x \leq t \\ \dfrac{sh(t)sh(1-x)}{sh(1)} & \text{si } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1) Calculer le spectre de T et les fonctions propres de T.

2) En déduire la norme de T.

3) Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+\pi^2 n^2}$.