PUB. IRMA, LILLE 2009
Vol. 69, N° IV

Actions localement libres rigides de groupes de Lie nilpotents

M. Belliart

Université Lille 1

Le résultat le plus fondamental de cet article est le suivant : il existe un groupe de Lie réel nilpotent G et une variété compacte V, avec $\dim(V) = \dim(G) + 1$, tels que toutes les actions localement libres de classe C^∞ de G sur V soient C^∞-conjuguées. D'autres résultats plus faibles ou plus particuliers seront encore obtenus. Avant d'en venir à des énoncés plus précis et à leurs preuves, on se permettra la digression qui suit.

The strongest result of this paper is that there exist a nilpotent real Lie group G and a compact manifold V with $\dim(V) = \dim(G) + 1$ such that all locally free C^∞ actions of G on V are pairwise C^∞-conjugate. Weaker results are also obtained. Before getting started on the mathematics, I shall indulge myself in a small digression on what mathematics nowadays become, in France at least, and what they should be.

Mots-clefs. Liberté ; action ; rigidité.
Keywords. Freedom ; action ; rigidity.
Classification mathématique par sujets. 37C89.

I. Parabase.

Ce texte, écrit en réaction à l'actuel pourrissement de la recherche universitaire, se passera d'abstract comme d'introduction : seuls comptent les théorèmes, et j'ai décidé d'exclure désormais de ma pratique ces passages publicitaires qui, bien souvent, sont seuls lus ; en viennent à compter plus que le réel contenu scientifique du texte qui leur sert de prétexte, un peu comme dans les grandes surfaces se vend non pas tant le produit que son emballage aux alléchantes photos avec écrit, en bas de celles-ci, en tout petit : “suggestion de présentation”.

Bien sûr, il est du coup inimaginable que ce travail paraisse dans une “revue à comité de lecture” : cependant, je considère qu'il s'agit bien d'une publication. La notion de “prépublication” n'est clairement qu'une absurdité commerciale : parce qu'afin de faire carrière de hideux esbroufeurs publiaient quotidiennement d'innommables brouillons, nous avons pu vouloir croire que la caution de comités éditoriaux fût nécessaire à la gloire de nos textes ; mais cette caution, désormais frelatée, ne trompe plus que les sots qui croient que tout se mesure à l'aide des mêmes chiffres, que chaque chose possède une valeur, disons même un *prix*, et que le poids du chercheur est égal au nombre de ses parutions dans les “bonnes” revues – lesquelles sont, bien entendu, celles qui ne publient que d'excellents chercheurs... Rappelons donc, pour les ignares, qu'une *publication* n'est qu'un texte rendu public. Ceci est donc une publication – quant à nos commerçants du savoir, qui ne jurent que par *mathscinet* et voudraient objecter : qu'ils apprennent d'abord à parler le Français.

De ne jamais plus soumettre mon travail aux revues à comité de lecture aura cet avantage que je pourrai enfin prétendre à cette originalité du ton et de la forme qui est bien l'apanage, et même le devoir, de tout vrai créateur – l'originalité est l'ennemie jurée du propriétaire de revue dont (vues les folles exigences qui sont siennes, en matière de *soumission* de l'auteur) je finis par me demander si, pour cet ignare papetier, la science mathématique soit encore autre chose qu'une branche parmi d'autres de la typographie. Ce qui appelle cette question bien plus profonde qu'elle ne paraît : le but du chercheur est-il de trouver, ou bien de *prouver* qu'il a trouvé ? (et si *prouver*, pour quelle raison cette preuve doit-elle laisser une trace écrite, pourquoi faut-il écrire et non se contenter de communications orales ?)

Si l'on me dit : “verba volans, scripta manans”, je réponds : “tout ce qui vit doit périr ; la chair pourrit mais l'os demeure longtemps après que la mort l'ait frappé.” Et voici bien pourquoi nos bibliothèques de recherche ressemblent à des mausolées... Rarissimes sont les articles dont on se souvient encore dix ans plus tard ; il y a à cela une bonne raison : la plupart du temps, nous publions (pour dire comme Saint Augustin) *non ut aliquid diceretur, sed ne taceretur* – c'est-à-dire : *non pour dire quelque chose, mais pour ne pas nous taire.*

Car en recherche, trop se taire est fort nuisible à la carrière... Mais la plupart d'entre nous, qui comme presque tout le monde n'avaient rien à dire et publiaient quand même pour justifier leurs copieux émoluements, vont désormais en venir à publier pour ne pas être lésés : ne pas être astreints, en punition de leur silence, à un surcroît d'heures d'enseignement qu'on n'aura même pas la décence de leur payer, punition au prétexte factice de “mauvaises évaluations” – or nous savons tous très bien que lesdites évaluations seront menées d'une manière fort imbécile, leurs critères étant tels que s'ils eussent servi depuis le dix-neuvième siècle on eût sans doute foutu du rab' de taf à Picard (ou Dulac ou bien Thom). J'irai jusqu'à proposer comme preuve de l'absurdité de la situation la comparaison du dossier de René Thom au mien, à vingt-cinq ans chacun pour fixer les idées ; et je prétends qu'évalués quantitativement et par un imbécile incompétent, rien ne prouve que je ne parusse pas supérieur au génie susnommé : ceci parce que Thom, au début de sa carrière, publia très peu de choses ; toutes sublimes, certes ! mais dont l'excellence, aux yeux de qui se borne à les compter sans lire, ne sautera jamais.

Car il fut un temps où ne rien publier qui ne soit à la fois important et définitif était, non un péché, mais une vertu : et il suffit de comparer la quantité de mathématiques présentes dans les "grandes" revues au début du vingtième siècle avec l'actuel flux tendu pour se convaincre que (de trois choses l'une) nos prédécesseurs étaient des ânes fieffés, ou bien c'est que nous sommes proprement géniaux... ou bien, peut-être, publions-nous n'importe quoi ?

Parlant d'un phénomène comparable qui frappait l'université Allemande en son temps, Schopenhauer moqua la philosophie des "foires aux livres" ; railla les échanges de bons procédés des "trois grands sophistes" : Schelling, Hegel, Fichte, sachant combien chacun d'eux faisait en tout lieu la publicité des deux autres. Nietzsche, perfide, donnait comme devise aux auteurs de son siècle *scribere deinde philosophare*, appelant George Sand la "vache à lait de la littérature Française" et règlant au médiatique Wagner son compte plus d'une fois. On se souvient de Nietzsche, Schopenhauer est toujours lu, mais qui lit encore Sand ou Schelling ou bien Fichte, et qui comprend Hegel ou Wagner ?

Je parlais ici, naturellement, de l'élite – la plèbe n'écoute pas de musique savante ; les gens du modèle ordinaire préfèreront se balader écouteurs aux oreilles, inattentifs au bruit que diffusera en icelles une clef USB contenant cent-mille titres au format MP3. Plutôt que de risquer le mal de crâne que distillent Schopenhauer et Nietzsche, ils achèteront Bernard-Henri Lévy ; au roman de madame de Lafayette préfèreront ceux de Nothomb dans le meilleur des cas, de Marc Lévy dans le pire. Car l'art éphémère, c'est connu, cause sa propre perte – chaque génération d'auteurs, sous sa production copieuse, ensevelit la précédente... Mais que notre science, plus de deux fois millénaire, s'abandonne à son tour à l'ignoble débauche du *produire pour produire* a quelque chose de consternant... On croirait que les gens du pouvoir soient incapables de méditer cette question : laquelle produit le plus, de la mine de charbon ou de la mine de diamants ? C'est que ces gens (qui n'ont jamais lu Nietzsche, que sans doute ils croient antisémite) sont encore englués dans ce piège de la morale judéo-chrétienne : qu'il y ait des bons et des méchants. Les bons se récompensent et les méchants se punissent. Le tout, bien sûr, étant de les distinguer les uns des autres – ne pas dire, tels un fameux monarque : "tuez-les tous ; Dieu reconnaîtra les siens"...

Quoi que, glissant d'un "tuez-les tous" à l'autre, on peut se prendre à rêver que le mot d'ordre des réformes en cours soit peut-être : "tuez-les tous, qu'il n'en reste pas un pour venir m'accuser" ! Et puisque nous vagabondâmes tantôt sur les terrains de la musique, de la philosophie et de la judéité, il est ici légitime que nous citions l'ancêtre de Felix Mendelssohn pour ce portrait que, dans sa

Jérusalem, il brosse du cabbaliste – portrait qui pourrait tout aussi bien convenir à nos zélateurs des “bonnes revues” : *ce que l’intelligence a construit, la folie s’efforcera de l’abattre, souvent à l’aide des mêmes outils.* Or les premiers journaux mathématiques avaient-ils un autre but que la diffusion du savoir scientifique ? Mais ce but est désormais bien rarement poursuivi ; et la logique circulaire de notre fonctionnement est bien la suivante : une bonne revue est une revue qui publie de bons chercheurs, qui sont des chercheurs qui publient dans de bonnes revues, qui sont... Evidemment, les “autorités” ne se gênent pas pour provoquer des coupe-circuits, disant : “cette revue, ces chercheurs-là sont bons” (axiome), d’où ils tireront la liste de tous les excellents par la méthode du *diagram chasing* – où j’élève force réserves.

Le “bon” chercheur en mathématiques ne se définit ni comme quelqu’un qui publierait dans les revues “sérieuses” (comme s’il en existait !), ni comme quelqu’un qui chaque année, mois, semaine ou heure nous pondrait en chansons l’oeuf d’or plaqué de son “rapport d’activité”, ni comme un globe-trotter qui ne quitterait un train que pour grimper dans un avion – *le “bon” chercheur ne se définit pas.* Mais certains gens (qui ne sont beaux qu’à ça) semblent s’être donné pour mission de nous *évaluer* ; de nous coller des notes sur vingt et sur cent ; de nous flanquer, comme à l’école de grand’père, des punitions si la moyenne les déçoit... On sait bien leurs manières : et nul doute que, comme toujours avec eux lorsqu’il s’agit de bons points et d’images, les cancres seront ceux dont la gueule ne leur reviendra pas, les bons élèves, les chouchous de ces maîtres. Conscient de cette tare irréversible de la médiocratie évaluative, c’est avec ataraxie et bonace que je publie ce texte ; que j’en publierai d’autres – publications qui ne me dispenseront sans doute pas (vues l’indigence de ma communication, de ma propagande, de ma *réclame* enfin quoi) d’écoper tôt ou tard de la punition que madame Pécresse a prévue dans ses lois pour tous les impertinents dans mon genre, éternels mécontents du système qui ne savent admettre que rien ne soit jamais qu’une question d’apparences, de mensonge et d’argent.

Lors des récentes assemblées générales, certains ont clamé du haut de leur sagesse : “nous allons vers une université féodale”. Ils auraient pu réfléchir davantage ; et peut-être comprendre que nous nous *éloignons* de cette “université féodale” qui les terrorise pour entrer dans quelque chose de pire : le pourrissement, la mafia qui caractérise les bureaucraties bananières de nos anciennes colonies – le colon est venu, a imposé ses coutumes saugrenues et la paperasse qui va avec, est reparti : subsistent les types à casquette qui seuls savent tamponner les bordereaux nécessaires à l’obtention des permis de pisser. Tant qu’il ne passe pas dans le coin un gusse à la Aimé Césaire, nul ne réfléchit au grotesque de la chose : on croit qu’on a toujours fait comme ça, on croit que c’est normal, à la limite ceux qui ne sont pas d’accord sont suspects.

Nul ne connaît l’avenir : pas la peine d’en appeler à la cosmétique, de faire le fataliste, de croire que le désastre ait été de toute éternité tracé dans la course des astres – cependant, Cassandre avait ceci de désespérant que non seulement elle prédisait systématiquement le pire, mais qu’à chaque fois elle tombait juste : et l’avenir dira si je suis le Cassandre de l’université des technologies de Lille, lorsque je prophétise : d’ici dix ans au plus tard, nos étudiants ne viendront plus pour apprendre, mais pour obtenir des diplômes entretemps devenus nécessaires pour s'inscrire au chômage ; ils les *paieront* en s'endettant au moyen d'un prêt étudiant carabiné couvrant à peine des frais d'inscriptions devenus proprement démesurés. Quant à nous, nous ne viendrons plus pour enseigner : mais pour donner des notes, voyons ! Pour *évaluer* ces étudiants de la réussite desquels dépendra tant notre carrière... Eux pourront se venger, car par surcroît de démagogie, la toute puissante bureaucratie leur demandera de nous évaluer sur la base de questionnaires proprement infâmants et ne portant que sur notre comportement, notre aspect physique, notre dégaine (tout sauf le sexe ou la couleur de peau : *ça*, et *ça seulement*, c'est interdit) ; en tout cas, il ne sera surtout pas question de notre capacité professionnelle. Nous nous montrerons donc, avec ces élèves constitués en permanent jury de la star fac', de sympathiques copains, des potes, des grands frères, des partenaires – plus des maîtres : des esclaves, et eux n'apprendront jamais rien ; l'important pour nous étant d'assurer l'objectif statistique de soixante pour cent de licenciés (à titre collectif) et (d'un point de vue plus individualiste) de bien nous faire voir lorsque nous "travaillons", par exemple en publiant plus de polys que la concurrence sur internet. Entre deux de ces hordalies que l'on nomme "sessions d'examens", nous publierons aussi sans relâche des choses insipides afin de ne pas devoir faire d'enseignement supplémentaire ; et nous mériterons l'épithète que nous adressa Raymond Queneau dans *les derniers jours*, lorsqu'il fit dire à un étudiant recalé et amer : "ils ont voulu relever le niveau, les *farceurs* !"

Je pense avoir le droit d'écrire ce qui précède : la France est une démocratie. Quant au devoir de réserve (qui impose aux fonctionnaires une certaine discrétion dans l'expression de leurs opinions) la coutume l'assouplit dans le cas des universitaires – faute de cette tolérance, on voit mal comment nos collègues de philosophie, de droit, d'histoire, de sociologie, de psychologie... pourraient encore enseigner librement.

Je pense que ce qui précède n'est pas ici déplacé : on pourrait m'opposer que les revues de mathématiques soient faites pour que l'on y publie des mathématiques, non de la politique ; or, c'est très faux. Les mathématiques, comme toute discipline humaine, ont une histoire ; une personnalité ; et, partant, une politique – qui nous appartient, à nous mathématiciens, de plein droit.

Cela étant dit : place à la science !

II. Construction des modèles.

On construit ici les objets dont il s'agira de mener l'étude. Les bases de la théorie des groupes et algèbres de Lie et celles du calcul différentiel sont réputées connues (une référence solide est **[Hel]**). On notera

$$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3)$$

les coordonnées naturelles sur $\mathbf{R}^{15}$. Par abus de notation, on admet de remplacer l'indice dans "a_1", "b_2"... par un nombre qui lui est égal modulo 3, et cet indice sera fréquemment noté $\imath$ ou $\jmath$. On définit dans $\mathbf{R}^{15}$ le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}$ comme le lieu où s'annullent les douze formes linéaires suivantes :

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1 - d_2, d_2 - d_3, e_1 + e_2 + e_3.$$

On nomme $\mathbf{A}$ le quotient de $\mathbf{R}^{15}$ par $\mathbf{K}$. Les formes linéaires précédentes constituent un système de coordonnées sur $\mathbf{A}$. Nous posons par souci de simplification $d'_1 = d_2 - d_3$, $d'_2 = d_3 - d_1$, $d'_3 = d_1 - d_2$ et $e = e_1 + e_2 + e_3$. Ensuite, nous définissons un certain nombre de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{A}$ au moyen d'équations linéaires :

Définition 1. Le sous-espace de $\mathbf{A}$ défini par $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ est $\mathbf{B}$. Le sous-espace de $\mathbf{B}$ défini par $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ est $\mathbf{C}$. Le sous-espace de $\mathbf{C}$ défini par $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ est $\mathbf{D}$. La droite de $\mathbf{D}$ définie par $d'_1 = d'_2 = d'_3 = 0$ est $\mathbf{E}$.

Pour tout plan Π de $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, la préimage de Π dans $\mathbf{A}$ est $\mathbf{A}_\Pi$. Le sous-espace de $\mathbf{B}$ défini par $b_{\imath+1} = b_{\imath+2} = 0$ est $\mathbf{B}_\imath$. Le sous-espace de $\mathbf{C}$ défini par $c_{\imath+1} = c_{\imath+2} = 0$ est $\mathbf{C}_\imath$. Le plan de $\mathbf{D}$ défini par $d'_\imath = 0$ est $\mathbf{D}_\imath$.

Convention 2. Il y a sur $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ un système de coordonnées naturelles (a_1, a_2, a_3). En vue de la proposition 5 à venir, nous excluons de la famille $\mathbf{A}_\Pi$ les objets particuliers pour lesquels le plan Π contient l'un des trois axes de coordonnées. Ceci revient à supposer que Π admet une équation de la forme $a_3 = \mu a_1 + \nu a_2$ avec μ et ν non-nuls.

Considérons le réseau $\mathcal{L}$ de $\mathbf{R}^{15}$ dont les points ont des coordonnées entières, *les trois premières coordonnées étant paires* : ce réseau se projette sur $\mathbf{A}$ en un réseau que nous noterons $\mathbf{a}$ (rappelons que dans un espace vectoriel, un réseau est le sous-groupe discret engendré par une base). Nous noterons $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}_\imath$, $\mathbf{c}_\imath$ et $\mathbf{d}_\imath$ les intersections de $\mathbf{a}$ avec, respectivement : $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}_\imath$, $\mathbf{C}_\imath$ et $\mathbf{D}_\imath$. Chacun des sous-groupes discrets $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$... est un réseau dans le sous-espace vectoriel de $\mathbf{A}$ lui correspondant.

Nous allons maintenant modifier la loi de groupe additif de $\mathbf{A}$ pour en faire un groupe de Lie nilpotent. Tous les sous-espaces vectoriels précédemment construits deviendront des sous-groupes de Lie ; tous les sous-groupes discrets précédemment construits demeureront des sous-groupes discrets (c'est à cet effet que nous avons imposé aux trois premières coordonnées des éléments de $\mathbf{a}$ d'être paires). Pour définir la nouvelle loi de $\mathbf{A}$, nous construirons d'abord l'algèbre de Lie de ses champs invariants par translations à droite.

Soit X' un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^{15}$: il peut se produire que X' soit projetable sur $\mathbf{A}$; c'est en particulier le cas si X' possède dans les coordonnées choisies une forme analytique dans laquelle n'interviennent pas les variables $d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3$. Nous pouvons alors noter X le projeté de X' sur $\mathbf{A}$. Les champs suivants sont clairement projetables :

$$A'_\imath = \frac{\partial}{\partial a_\imath} - b_\imath \frac{\partial}{\partial c_\imath} - a_\imath b_\imath \frac{\partial}{\partial d_\imath} - \frac{b_\imath^2}{2} \frac{\partial}{\partial e_\imath}, \quad B'_\imath = \frac{\partial}{\partial b_\imath} + b_{\imath+2} \frac{\partial}{\partial d_{\imath+1}},$$

$$C'_\imath = \frac{\partial}{\partial c_\imath} + a_\imath \frac{\partial}{\partial d_\imath} + b_\imath \frac{\partial}{\partial e_\imath}, \quad D'_\imath = \frac{\partial}{\partial d_\imath}, \quad E'_\imath = \frac{\partial}{\partial E_\imath}.$$

Il est utile de noter que $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ et que les $E_\imath$ sont tous égaux (de sorte que désormais nous omettrons l'indice). Les douze champs

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, E$$

forment un parallélisme sur $\mathbf{A}$. A présent, faisons décrire indépendemment à X et à Y la liste de ces champs, et déterminons à chaque fois la valeur de $[X,Y]$: comme le crochet de Lie est antisymétrique, il suffit de mener le calcul lorsque Y est à droite dans la liste ; si nous nous dispensons de mentionner ceux des crochets qui sont nuls, nous aboutissons par un calcul direct à ces identités :

$$[A_\imath, B_\imath] = C_\imath, \quad [A_\imath, C_\imath] = D_\imath,$$

$$[B_\imath, B_{\imath+1}] = D_{\imath+2}, \quad [B_\imath, C_\imath] = E.$$

Ainsi, l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ engendré par nos douze champs est stable par le crochet de Lie ; ou encore : est une algèbre de Lie.

Soit à nouveau un champ X' sur $\mathbf{R}^{15}$. Soit p un point de $\mathbf{R}^{15}$ et soit p' l'image de p sous le flot de X' au bout du temps t. Supposons X' susceptible d'une intégration explicite : l'écriture d'une formule donnant les coordonnées du point p' en fonction de celles de p se heurte au problème technique du grand nombre de ces coordonnées ; cependant, si certaines de celles-ci sont invariantes sous le flot de X', on peut les omettre pour gagner de la place. Avec ce système, en notant $(a_1, \ldots, e_3)$ les coordonnées de p et $(a'_1, \ldots, e'_3)$ celles de p' :

$$X = A'_\imath \Rightarrow a'_\imath = a_\imath + t,\ c'_\imath = c_\imath - tb_\imath,\ d'_\imath = d_\imath - (a_\imath t + \frac{t^2}{2})b_\imath,\ e'_\imath = e_\imath - \frac{b_\imath^2}{2}t,$$

$$X = B'_\imath \Rightarrow b'_\imath = b_\imath + t,\ d'_{\imath+1} = d_{\imath+1} + b_{\imath+2}t,$$

$$X = C'_\imath \Rightarrow c'_\imath = c_\imath + t,\ d'_\imath = d_\imath + a_\imath t,\ e'_\imath = e_\imath + b_\imath t,$$

$$X = D'_\imath \Rightarrow d'_\imath = d_\imath + t, \quad X = E'_\imath \Rightarrow e'_\imath = e_\imath + t.$$

De là résulte que les champs précédents sont complètement intégrables (c'est-à-dire, tangents à des groupes à un paramètre de difféomorphismes de $\mathbf{R}^{15}$). Cette propriété est stable par projection et nous permet de considérer les flots $A_\imath^t$ de $A_\imath$, $B_\imath^t$ de $B_\imath$, etc. Toujours à l'aide de nos formules, nous pouvons déterminer sans peine la valeur des commutateurs $[X^t, Y^s] = X^t Y^s X^{-t} Y^{-s}$ où t, s sont deux réels et X, Y deux champs pris dans la famille $A_1, \ldots, E$: ici encore, on peut prendre Y à droite de X dans la liste et omettre les commutateurs triviaux ; on obtient tous calculs faits

$$[A_\imath^t, B_\imath^s] = C_\imath^{-ts} D_\imath^{-t^2 s/2} E_\imath^{-ts^2/2}, \quad [A_\imath^t, C_\imath^s] = D_\imath^{-ts},$$

$$[B_\imath^t, B_{\imath+1}^s] = D_{\imath+2}^{-ts}, \quad [B_\imath^t, C_\imath^s] = E^{-ts}.$$

Soit maintenant $\mathbf{G}$ la famille des difféomorphismes de $\mathbf{A}$ ayant la forme :

$$A_1^{a_1} A_2^{a_2} A_3^{a_3} B_1^{b_1} B_2^{b_2} B_3^{b_3} C_1^{c_1} C_2^{c_2} C_3^{c_3} D_1^{d_1} D_2^{d_2} E^e$$

où les coefficients sont des réels quelconques. Ce que nous venons d'établir en dit plus que la proposition suivante (non seulement elle est vraie, mais nous venons de coder explicitement $\mathbf{G}$ par générateurs et relateurs) :

Proposition 3. *L'ensemble* $\mathbf{G}$ *est un groupe de Lie de transformations polynomiales de* $\mathbf{A}$ *qui agit simplement transitivement sur cet espace vectoriel.*

Soit $\mathcal{O}$ l'origine de l'espace vectoriel $\mathbf{A}$. A tout $a \in \mathbf{A}$, nous pouvons associer l'unique élément g de $\mathbf{G}$ tel que $g(\mathcal{O}) = a$ et, au moyen de cette application, transporter sur $\mathbf{A}$ la loi de $\mathbf{G}$: alors, $\mathcal{O}$ devient l'élément neutre de $\mathbf{A}$, que nous noterons désormais 1. Il est connu que $\mathcal{A}$ est l'algèbre des champs de vecteurs invariants sur $\mathbf{A}$ par translations à droite (ce qui peut d'ailleurs se retrouver par le calcul). Le résultat suivant est évident vus notre codage explicite de $\mathbf{G}$ et notre définition de la structure du groupe de Lie $\mathbf{A}$:

Proposition 4. *Tous les sous-espaces vectoriels $\mathbf{A}_\Pi$, $\mathbf{B}$... de $\mathbf{A}$ introduits plus haut (désignés par des majuscules grasses affectées ou non d'indices) demeurent des sous-groupes de Lie de $\mathbf{A}$ pour sa nouvelle loi de composition interne.*

Notons que sur $\mathbf{C}$, les lois de sous-groupe de Lie et de sous-espace vectoriel de $\mathbf{A}$ coïncident. A nos sous-groupes de Lie connexes de $\mathbf{A}$ correspondront autant de sous-algèbres de Lie de $\mathcal{A}$, que nous désignerons par la même notation en remplaçant toutefois la majuscule grasse par une majuscule italique ; il est aisé d'exhiber des bases de ces sous-algèbres de Lie. Par exemple, une base de $\mathcal{B}_2$ est $B_2, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, E$; une base de $\mathcal{C}_1$ est C_1, D_1, D_2, E. Nous avons la proposition suivante, qui a pour corollaire direct la nilpotence de $\mathbf{A}$:

Proposition 5. *Soit $\mathcal{X}$ l'une des algèbres de Lie $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}_\Pi$. La suite centrale ascendante de $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{X}$. Tout idéal de $\mathcal{X}$ non-contenu dans $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{E}$. Le transporteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ est $\mathcal{B}$. Les $\mathcal{B}_\imath$ sont les sous-algèbres de $\mathcal{X}$ contenues dans $\mathcal{B}$, contenant strictement $\mathcal{C}$ et ne possédant aucun élément dont la projection sur $\mathcal{X}/\mathcal{D}$ soit de rang supérieur ou égal à 2. Enfin, $\mathcal{C}_\imath = [\mathcal{X}, \mathcal{B}_\imath]$ et $\mathcal{D}_\imath = [\mathcal{X}, \mathcal{C}_\imath]$.*

Preuve. Toutes ces assertions résultent de calculs élémentaires d'algèbre linéaire. Prouvons juste celle-ci : "tout idéal de $\mathcal{X}$ non-contenu dans $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{E}$". Considérons un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{X}$ ne contenant pas $\mathcal{E}$, et soit l'un de ses éléments que nous mettons sous la forme

$$X = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 + c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 + D$$

avec $D \in \mathcal{D}$: puisque $[[X, B_\imath], B_\imath] = a_\imath E$, les $a_\imath$ sont nuls ; alors, $[X, C_\imath] = b_\imath E$ donc les $b_\imath$ sont également nuls ; enfin, $[B_\imath, X] = c_\imath E$ dont les $c_\imath$ sont nuls, ce qui prouve que $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$. □

Il est visible que $\mathbf{A}$ possède une certaine symétrie ; explicitons-la maintenant. Soit $\imath \to \jmath$ une permutation des indices $1, 2, 3$ ayant la signature ε : on constate sans effort que l'application linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui, sur la famille génératrice $A_1 \ldots D_1, D_2, D_3, E$ de $\mathcal{A}$ prend la forme

$$A_\imath \to \varepsilon A_\jmath,\ B_\imath \to B_\jmath,\ C_\imath \to \varepsilon C_\jmath,\ D_\imath \to D_\jmath,\ E \to \varepsilon E$$

d'une part est bien définie, d'autre part constitue un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$. Celui-ci en induit un autre du groupe de Lie $\mathbf{A}$.

Définition 6. Nous dirons d'un tel automorphisme de $\mathbf{A}$ qu'il est *circulaire*.

Les automorphismes circulaires permutent entre eux les $\mathbf{B}_\imath$, les $\mathbf{C}_\imath$, les $\mathbf{D}_\imath$, préservent la classe des sous-groupes normaux de $\mathbf{A}$ ayant le type $\mathbf{A}_\Pi$, et on a l'espèce de réciproque suivante :

Proposition 7. *Soit τ un morphisme injectif de $\mathcal{A}_\Pi$ dans $\mathcal{A}$. Alors, l'image de τ coïncide avec celle de $\mathcal{A}_\Pi$ par un certain automorphisme circulaire de $\mathcal{A}$.*

Preuve. Rappelons que nous excluons de la famille $\mathbf{A}_\Pi$ les objets pour lesquels Π contient l'un des axes de coordonnées du repère naturel de $\mathbf{A}/\mathbf{B}$. Une équation de Π est donc $a_3 = \mu a_1 + \nu a_2$ où les réels μ et ν sont tous deux non-nuls, et $\mathcal{A}_\Pi$ contient $A'_1 = A_1 + \mu A_3$ et $A'_2 = A_2 + \nu A_3$. Une fois ceci noté, un calcul facile montre que la suite centrale descendante de $\mathcal{A}_\Pi$ est $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \{0\}$: ainsi, $\tau(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ et $\tau(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$; par comparaison des dimensions, on voit qu'il y a égalité. Soit maintenant $X \in \mathcal{C} - \mathcal{D}$ et soit $\mathcal{I}_X$ l'ensemble des crochets $[X, Y]$ où Y décrit $\mathcal{A}_\Pi$: on vérifie facilement que les $\mathcal{I}_X$ ont pour intersection $\mathcal{E}$; de même lorsque Y décrit $\mathcal{A}$, d'où il s'ensuit que $\tau(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. On en déduit l'existence d'un réel non-nul ε tel que $\tau(E) = \varepsilon E$. Ensuite, que ce soit dans $\mathcal{A}_\Pi$ ou $\mathcal{A}$, le transporteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ est $\mathcal{B}$: donc, $\tau(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Dans $\mathcal{A}_\Pi/\mathcal{D}$ comme dans $\mathcal{A}/\mathcal{D}$, les éléments de $\mathcal{B}/\mathcal{D}$ qui ont un adjoint de rang au plus un sont proportionnels à l'un des trois $B_\imath$ modulo $\mathcal{C}$; donc, quitte à composer τ avec un automorphisme circulaire de $\mathcal{A}$, on peut supposer qu'il existe des constantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et des éléments U_1, U_2, U_3 de $\mathcal{C}$ tels que $\tau(B_\imath) = \beta_\imath B_\imath + U_\imath$. Considérant ensuite l'image de $X \in \mathcal{A}_\Pi$ par l'application linéaire $X \to [X, B_\imath]$, on conclut qu'il existe des constantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et des éléments V_1, V_2, V_3 de $\mathcal{D}$ tels que $\tau(C_\imath) = \gamma_\imath C_\imath + V_\imath$. Calculons maintenant, modulo $\mathcal{E}$:

$$\tau(D_{\imath+2}) = \tau([B_\imath, B_{\imath+1}]) = [\tau(B_\imath), \tau(B_{\imath+1})] = \beta_\imath \beta_{\imath+1} D_{\imath+2}$$

mais de la contrainte $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ découle l'égalité des $\beta_{\imath+1}\beta_{\imath+2}$, puis celle des $\beta_\imath$ que nous noterons désormais sans indice. Calculons ensuite

$$\varepsilon E = \tau(E) = \tau([B_\imath, C_\imath]) = [\tau(B_\imath), \tau(C_\imath)] = \beta\gamma_\imath E$$

d'où l'égalité des $\gamma_\imath$ que nous noterons désormais sans indice. Pour résumer : il existe des constantes β, γ non-nulles et des éléments $U_\imath$ de $\mathcal{C}$, $V_\imath$ de $\mathcal{D}$, $W_\imath$ de $\mathcal{E}$ (les $W_\imath$ de somme nulle) tels que

$$\tau(B_\imath) = \beta B_\imath + U_\imath,\ \tau(C_\imath) = \gamma C_\imath + V_\imath,\ \tau(D_\imath) = \beta^2 D_\imath + W_\imath,\ \tau(E_\imath) = \beta\gamma E_\imath.$$

Considérons alors les égalités suivantes :

$$[A'_1, B_1] = C_1, \quad [A'_1, B_2] = 0, \quad [A'_1, B_3] = \mu C_3,$$
$$[A'_2, B_1] = 0, \quad [A'_2, B_2] = C_2, \quad [A'_2, B_3] = \nu C_3,$$

et appliquons-leur τ : nous aboutissons à l'existence d'éléments X_1, X_2 de $\mathcal{B}$ pour lesquels $\tau(A'_\imath) = \beta^{-1}\gamma A'_\imath + X_\imath$. De là vient facilement le résultat voulu. $\square$

Préoccupons-nous maintenant de $\mathbf{a}$. Définissons dans $\mathbf{A}$ les éléments :

$$\alpha_\imath = \exp(2A_\imath),\ \beta_\imath = \exp(B_\imath),\ \gamma_\imath = \exp(C_\imath),\ \delta_\imath = \exp(D_\imath),\ \varepsilon = \exp(E).$$

Rappelons que $\mathbf{a}$ est la projection sur $\mathbf{A}$ d'un certain réseau $\mathcal{L}$ de $\mathbf{R}^{15}$.

Proposition 8. *Le sous-groupe de $\mathbf{A}$ engendré par les $\alpha_\imath$, les $\beta_\imath$, les $\gamma_\imath$, les $\delta_\imath$ et ε coïncide avec $\mathbf{a}$.*

Preuve. Tout comme on a défini $\mathbf{G}$, on peut définir le groupe simplement transitif $\mathbf{G}'$ des transformations polynomiales de $\mathbf{R}^{15}$ qui ont la forme

$$A_1'^{a_1} A_2'^{a_2} A_3'^{a_3} B_1'^{b_1} B_2'^{b_2} B_3'^{b_3} C_1'^{c_1} C_2'^{c_2} C_3'^{c_3} D_1'^{d_1} D_2'^{d_2} D_3'^{d_3} E_1'^{e_1} E_2'^{e_2} E_3'^{e_3}$$

puis constater que $\mathbf{G}$ est le quotient de $\mathbf{G}'$ par un certain sous-groupe de dimension trois (qui coïncide avec le groupe des translations de $\mathbf{R}^{15}$ parallèlement à $\mathbf{K}$). On peut aussi définir des éléments $\alpha_\imath' = \exp(2A_\imath')$, etc. qui relèvent les éléments $\alpha_\imath$, etc. de $\mathbf{A}$. Sur les calculs explicites que nous avons menés des flots de $A_\imath'$, etc. il se voit sans peine que chacun des quinze difféomorphismes $\alpha_1', \ldots, \varepsilon_3'$ de $\mathbf{R}^{15}$ préserve $\mathcal{L}$, d'une part, et que d'autre part tout point de $\mathcal{L}$ est l'image de $0 \in \mathcal{L}$ par un certain mot en les lettres $\alpha_1', \ldots, \varepsilon_3'$: de ceci découle que le sous-groupe engendré par $\alpha_1', \ldots, \varepsilon_3'$ dans $\mathbf{G}'$ est le stabilisateur de $\mathcal{L}$ et qu'il est transitif sur cette partie de $\mathbf{R}^{15}$. Par projection, le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \varepsilon$ est le stabilisateur de $\mathbf{a}$ et il est transitif sur cet ensemble. De la façon dont nous avons identifié $\mathbf{A}$ à $\mathbf{G}$, ceci revient à dire que $\mathbf{a}$ est le sous-groupe discret de $\mathbf{A}$ engendré par les $\alpha_1, \ldots, \varepsilon$. □

Nous admettons les résultats suivants, qui reposent uniquement sur le calcul :

Proposition 9. *Le groupe dérivé* $\mathbf{a}'$ *de* $\mathbf{a}$ *est engendré par* $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \delta_1, \delta_2$ *et* ε. *Son centralisateur dans* $\mathbf{a}$ *est* $\mathbf{c}$. *La suite centrale ascendante de* $\mathbf{a}$ *est* $\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$.

Plutôt que d'invoquer la théorie générale des réseaux dans les groupes de Lie nilpotents, nous préférons donner du fait suivant une preuve élémentaire :

Proposition 10. *La variété* $\mathbf{V} = \mathbf{A}/\mathbf{a}$ *est compacte.*

Preuve. Il est facile d'exhiber un domaine fondamental relativement compact dans $\mathbf{A}$ pour cette variété quotient : précisément, ce domaine est la projection sur $\mathbf{A}$ du "pavé" de $\mathbf{R}^{15}$ composé des points dont les trois premières coordonnées sont dans $[0, 2[$ et les autres dans $[0, 1[$. Il suffit pour le voir d'utiliser le codage explicite de $\mathbf{G}$ décrit plus haut. □

Nous avons voulu éviter tout recours inutile à la théorie générale des réseaux dans les groupes de Lie ; nous dirons juste qu'un *réseau* $\mathbf{r}$ dans un groupe de Lie nilpotent $\mathbf{R}$ est un sous-groupe discret (en topologie métrique) tel que le quotient $\mathbf{R}/\mathbf{r}$ soit compact ($\mathbf{r}$ est donc Zariski-dense dans $\mathbf{R}$) : ainsi, chaque sous-groupe discret de $\mathbf{A}$ désigné ici par une certaine minuscule grasse est un réseau dans le sous-groupe connexe de $\mathbf{A}$ désigné par la majuscule grasse correspondante. Nous devrons quand même recourir à l'important théorème suivant de Malcev, dont la preuve se trouve dans **[Ra]** (théorème 2.11 et corollaires) :

Théorème (Malcev). *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe de Lie réel nilpotent, connexe et simplement connexe ; soit* $\mathbf{g}$ *un réseau de* $\mathbf{G}$ *; soit* ψ *un morphisme de* $\mathbf{g}$ *dans un autre groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe* $\mathbf{H}$ *: alors,* ψ *s'étend en un unique morphisme* Ψ *de* $\mathbf{G}$ *dans* $\mathbf{H}$ *dont le graphe est la clôture de Zariski de celui de* ψ*, et si* ψ *est injectif,* Ψ *l'est aussi.*

Corollaire 11. *Soit* $\mathbf{L}$ *un groupe de Lie réel nilpotent, connexe et simplement connexe ; soit* $\mathbf{l}$ *un réseau de* $\mathbf{L}$. *Alors, l'ensemble des sous-groupes discrets de*

$\mathbf{L}$ *qui sont isomorphes à* $\mathbf{l}$ *possède une structure d'espace homogène* $\mathbf{G}/\mathbf{g}$ *où* $\mathbf{G}$ *est un groupe de Lie et* $\mathbf{g}$ *un sous-groupe discret.*

Justification. Soit $\mathbf{l}'$ un sous-groupe discret de $\mathbf{L}$ isomorphe à $\mathbf{l}$. Soit ψ un isomorphisme de $\mathbf{l}$ sur $\mathbf{l}'$. Selon le théorème de Malcev, ψ s'étend d'une manière et d'une seule en un isomorphisme Ψ de $\mathbf{L}$ sur lui-même. Comme ψ est défini à composition près à droite par un automorphisme de $\mathbf{l}$, on voit donc que l'espace des $\mathbf{l}'$ est isomorphe au quotient du groupe des automorphismes de $\mathbf{L}$ par le stabilisateur de $\mathbf{l}$ dans ce groupe de Lie. $\square$

Soit $\mathbf{x}$ l'un des sous-groupes discrets de $\mathbf{A}$ que nous avons construits et nommés par des minuscules grasses affectées ou non d'indices. Pour tout élément g de $\mathbf{x}$, soit $\mathbf{x}(g)$ le sous-groupe $g\mathbf{x}g^{-1}$ de $\mathbf{A}$. Parce que dans tous les cas $\mathbf{x}$ est normal dans $\mathbf{a}$, l'application $g \to \mathbf{x}(g)$ de $\mathbf{A}$ dans l'espace homogène *ad hoc* (dont nous prenons $\mathbf{x}$ pour point-base) se factorise via la projection naturelle $\mathbf{A} \to \mathbf{V}$ associant à g sa classe à droite pour $\mathbf{a}$. Nous prenons pour point-base p_0 sur $\mathbf{V}$ la classe de l'élément neutre et définissons ainsi des objets $\mathbf{a}(g)$, $\mathbf{c_1}(g)\ldots$ que l'on peut voir comme des faisceaux localement constants de groupes discrets ou bien comme des applications algébriques entre variétés homogènes pointées, selon le point de vue. Dans la première vision des choses, notons que $\mathbf{a}(p)$ s'identifie de manière naturelle au groupe fondamental de $\mathbf{V}$ évalué en p (à l'élement a de $\mathbf{a}(p)$ correspond la classe d'homotopie d'un lacet quelconque obtenu en projetant sur $\mathbf{V}$ un chemin qui mène de g à ag dans $\mathbf{A}$, où g est n'importe quel relevé de p).

Etant donné un plan Π de $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ admettant une équation de la forme $a_3 = \mu a_1 + \nu a_2$ où $\mu\nu \neq 0$, nous noterons Φ_Π l'action localement libre naturelle de $\mathbf{A}_\Pi$ sur $\mathbf{V}$ par translations à gauche et $\mathcal{F}_\Pi$ le feuilletage de $\mathbf{V}$ par les orbites de cette action. De tels feuilletages sont bien connus : et l'on sait que $\mathcal{F}_\Pi$ est à orbites compactes si Π est rationnel, à orbites denses dans les autres cas. Nous voyons les Φ_Π comme des modèles auxquels comparer d'autres actions localement libres peut-être plus complexes qui pourraient avoir lieu sur $\mathbf{V}$; nous considérons une telle action localement libre Φ de classe C^∞ de $\mathbf{A}_\Pi$ sur $\mathbf{V}$ et allons maintenant l'étudier ainsi que le feuilletage $\mathcal{F}$ qui lui correspond.

III. Etude de Φ et de $\mathcal{F}$.

Commençons par introduire le faisceau d'holonomie de Φ. Soit p un point de $\mathbf{V}$. Soit $\mathbf{s}(p)$ le stabilisateur de p dans $\mathbf{A}_\Pi$ pour Φ. Par équivariance, nous avons $\mathbf{s}(\Phi(x,p)) = x\mathbf{s}(p)x^{-1}$ pour tout x de $\mathbf{A}_\Pi$; la feuille $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{F}$ qui passe par p s'identifie par ailleurs à l'espace homogène $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{s}(p)$ *via* l'application $x \to \Phi(x,p)$ de $\mathbf{A}_\Pi$ dans $\mathbf{V}$, et le groupe fondamental de $\mathcal{F}_p$ est donc isomorphe à $\mathbf{s}(p)$. L'application naturelle de $\mathbf{s}(p)$ dans $\mathbf{a}(p)$ qui, à $x \in \mathbf{s}(p)$, associe la classe d'homotopie d'un lacet $t \to \Phi(c(t),p)$ où $c(t)$ est n'importe quel chemin de 1 à x dans $\mathbf{A}_\Pi$ est injective en vertu d'un théorème de Novikov (cf. **[Go]**, IV.3.10). La collection des images des $\mathbf{s}(p)$ dans $\mathbf{a}(p)$ ne constitue pas en général un faisceau localement constant en sous-groupes de $\mathbf{a}(p)$, parce que certaines sections ponctuelles $x(p)$ de $\mathbf{s}(p)$ peuvent très bien ne pas s'étendre à un voisinage de p dans $\mathbf{V}$ (autrement dit, $\mathcal{F}$ peut avoir de l'holonomie) ; cependant, nous pouvons définir le sous-groupe $\mathbf{n}(p)$ de $\mathbf{a}(p)$ composé des x qui sont dans l'image de $\mathbf{s}(p)$ et pour lesquels, pour tout chemin $p(t)$ dans $\mathbf{V}$ d'origine $p = p(0)$, il existe une section continue $t \to x(t) \in \mathbf{a}(p(t))$ de $\mathbf{a}(p)$ pour laquelle $x(t)$ soit constamment dans l'image de $\mathbf{s}(p(t))$: de par sa définition, $\mathbf{n}(p)$ sera un faisceau localement constant en sous-groupes normaux de $\mathbf{a}(p)$. Pour tout $x \in \mathbf{n}(p)$, il existera un élément bien défini $\kappa(x)$ du stabilisateur de p dans $\mathbf{A}_\Pi$ pour Φ ; cet élément pourra être étendu de manière unique en une section locale de $\mathbf{s}(p)$ au-dessus de tout voisinage contractile de p dans $\mathbf{V}$, et l'obstruction à étendre x en une section globale de $\mathbf{s}(p)$ est purement topologique : pour qu'une telle section globale existe, il faut et suffit que x soit central dans $\mathbf{a}(p)$. La preuve du résultat suivant, fondamental pour la suite, va nous occuper un certain temps :

Proposition 12. *Ou bien $\mathcal{F}$ possède une infinité non-dénombrable de feuilles compactes, ou bien $\mathbf{b}(p) \subset \mathbf{n}(p)$, $\kappa(\mathbf{b}(p)) \subset \mathbf{B}$ et chaque feuille de $\mathcal{F}$ est dense.*

Preuve. Un théorème de Fedida (cf. [**Gh**]) nous permet de construire un revêtement universel Θ de $\mathbf{V}$ ayant les propriétés suivantes :

— L'espace au-dessus de $\mathbf{V}$ est $\mathbf{A}_\Pi \times \mathbf{R}$;

— Le point-base p_0 de $\mathbf{V}$ est l'image de $(1, 0)$;

— L'action horizontale $a * (x, t) = (ax, t)$ $(a, x \in \mathbf{A}_\Pi, t \in \mathbf{R})$ relève Φ ;

— Pour tout γ dans $\mathbf{a} = \mathbf{a}(p_0)$ (qui est le groupe fondamental du revêtement), on a $\gamma(x, t) = (\tau(\gamma, x, t), \sigma(\gamma, t))$ où τ est une certaine application de classe C^∞ dont l'étude est ici superflue tandis que σ est une action de $\mathbf{a}$ sur $\mathbf{R}$.

La dynamique des actions de groupes nilpotents sur $\mathbf{R}$ par difféomorphismes croissants est très bien comprise, et il est connu que σ se factorise en l'action fidèle d'un quotient abélien libre de $\mathbf{a}$. Evidemment, le noyau de σ est le groupe $\mathbf{n}(p_0)$: donc, $\mathbf{n}(p)$ contient déjà $\mathbf{c}(p)$, plus petit sous-groupe normal de $\mathbf{a}(p)$ donnant un quotient abélien libre (cf. proposition 9).

Dans $\mathbf{c}(p)$, il y a les sections globales $\delta_\imath(p)$ et $\varepsilon(p)$ dont les évaluations en p_0 sont respectivement $\delta_\imath$ et ε. L'application $p \to \kappa(\varepsilon(p))$ de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{A}_\Pi$ satisfait par construction la condition d'équivariance $\kappa(\varepsilon(\Phi(x, p))) = x\kappa(\varepsilon(p))x^{-1}$, donc son image est une réunion de classes de conjugaison dans $\mathbf{A}_\Pi$. Or, cette image est bornée (car $\mathbf{V}$ est compacte) : on en déduit que $\kappa(\varepsilon(p))$ est à valeurs dans le centre $\mathbf{D}$ de $\mathbf{A}_\Pi$, car aucune classe de conjugaison non-centrale dans $\mathbf{A}_\Pi$ n'est bornée (c'est un fait général de la théorie des groupes de Lie nilpotents qui, dans notre cas, peut se prouver par des calculs triviaux).

Ainsi, $\kappa(\varepsilon(p))$ est une application constante le long des feuilles de $\mathcal{F}$: si elle n'est pas globalement constante, le lieu où sa différentielle est non-nulle sera donc un ouvert non-vide de $\mathbf{V}$, invariant par Φ, en restriction auquel les feuilles de $\mathcal{F}$ seront les lieux de niveau compacts de l'application régulière κ (premier cas de l'alternative à prouver).

Plaçons-nous dans le cas restant. Ceci revient à supposer $\kappa(\varepsilon(p))$ constant. De même, les éléments $\kappa(\delta_\imath(p))$ de $\mathbf{A}_\Pi$ sont centraux dans $\mathbf{A}_\Pi$ et constants en tant que fonctions de p. Ensuite, il existe trois sections globales $\gamma_\imath(p)$ du faisceau quotient $\mathbf{c}/\mathbf{d}(p)$ définies par leurs évaluations en p_0, égales à $\delta_\imath$ modulo $\mathbf{D}$: répétant l'argument, on constate que pour l'application quotient de $\mathbf{c}/\mathbf{d}(p)$ dans $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{D}$ induite par κ, les images des $\gamma_\imath(p)$ sont dans le centre $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{D}$. Ainsi, $\kappa(\mathbf{c}(p)) \subset \mathbf{C}$.

Comme $\mathbf{c}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^6$ et discret dans $\mathbf{C}$ qui est isomorphe à $\mathbf{R}^6$, le sous-groupe $\kappa(\mathbf{c}(p))$ est donc un certain réseau de $\mathbf{C}$ (qui dépend de p). Considérons à présent le sous-groupe normal $\mathbf{n}_\imath$ de $\mathbf{a}$ engendré par $\gamma_\imath$, $\delta_\imath$ et ε : il lui correspond un sous-faisceau $\mathbf{n}_\imath(p)$ de $\mathbf{c}(p)$ non-contenu dans $\mathbf{d}$; l'image de $\mathbf{n}_\imath(p)$ dans $\mathbf{C}$ par κ possède pour clôture de Zariski un sous-espace vectoriel de dimension trois $\mathbf{N}_\imath(p)$ de $\mathbf{C}$ non-contenu dans $\mathbf{D}$; ce sous-espace satisfait par construction à la condition d'équivariance $\mathbf{N}_\imath(\Phi(x,p)) = x\mathbf{N}_\imath(p)x^{-1}$, et on en tire immédiatement que $\mathbf{N}_\imath(p)$ est un idéal de $\mathbf{A}_\Pi$ (en particulier, il ne dépend pas de p). Cet idéal est non-contenu dans $\mathbf{D}$, donc il contient $\mathbf{E}$ en vertu de la proposition 5. Mais comme l'intersection des $\mathbf{n}_\imath(p)$ est le groupe monogène engendré par $\varepsilon(p)$, celle des sous-espaces $\mathbf{N}_\imath$ de $\mathbf{C}$ doit être la droite $\mathbf{E}$ et nous concluons que $\kappa(\varepsilon(p))$ a la forme E^e pour un certain réel non-nul e.

A tout p, associons maintenant le réseau $\ell(p)$ de $\mathbf{C}/\mathbf{E}$ obtenu en projetant sur cet espace vectoriel le réseau $\kappa(\mathbf{c}(p))$ de $\mathbf{C}$. Il est facile de voir que l'espace $\mathbf{T}$ des réseaux de $\mathbf{C}/\mathbf{E}$ qui coupent $\mathbf{D}/\mathbf{E}$ en un réseau fixe et se projettent sur $\mathbf{C}/\mathbf{D}$ en un réseau fixe est un tore de dimension six sur lequel l'action naturelle de $\mathbf{A}_\Pi$ se fait par translations, le noyau de cette action admettant $\mathbf{B}$ pour composante connexe (de sorte que les $\mathbf{A}_\Pi$-orbites y sont des surfaces). Ces surfaces, ou bien sont des sous-tores parallèles, ou bien sont denses dans des sous-tores de dimension supérieure ou égale à trois de $\mathbf{T}$.

Cela étant, le rang de l'application équivariante ℓ de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{T}$ est constant le long des Φ-orbites ; de plus, en tout point p de $\mathbf{V}$, il vaut au maximum $\dim(V) - \dim(B) = 3$ et au minimum $\dim(A) - \dim(B) = 2$; enfin, si ce rang prend en au moins un point la valeur 2, alors les $\mathbf{A}_\Pi$-orbites dans $\mathbf{T}$ seront des tores-surfaces. Or, le rang de ℓ ne peut pas être 2 en tout point, car l'application induite par ℓ du groupe fondamental $\mathbf{a}$ de $\mathbf{V}$ en p_0 dans celui de $\mathbf{T}$ en $\ell(p_0)$ peut se calculer sans grands efforts et son image est isomorphe à $\mathbf{a}/\mathbf{b}$, groupe abélien libre de rang 3 qui ne saurait s'injecter dans le groupe fondamental d'une surface. Nous concluons que le rang de ℓ est 3 en au moins un point de $\mathbf{V}$: donc, s'il n'est pas constamment égal à 3, sur l'ouvert Φ-invariant de $\mathbf{V}$ où ℓ est de rang 3 les orbites de Φ seront les préimages (compactes) des tores-surfaces orbites de $\mathbf{A}_\Pi$ dans $\mathbf{T}$.

Mais nous avons écarté ce cas de figure où Φ possède une quantité non-dénombrable d'orbites compactes : nous concluons que ℓ est une submersion feuilletée et que les $\mathbf{A}_\Pi$-orbites sont denses dans le tore de dimension trois qui est l'image de $\mathbf{V}$ (donc, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont denses dans $\mathbf{V}$). Les fibres de la submersion ℓ ont pour composantes connexes les $\mathbf{B}$-orbites car elles les contiennent tout en ayant la même dimension. Le réseau $\mathbf{x}(p)$ de $\mathbf{B}$ qui stabilise p est l'extension de $\mathbf{c}(p)$ par un réseau de $\mathbf{B}/\mathbf{C}$, nécessairement isomorphe à $\mathbf{Z}^3$ et image par κ d'un sous-groupe normal de $\mathbf{a}(p)$ qui centralise $\mathbf{c}(p)$ modulo $\mathbf{e}(p)$; ainsi, $\mathbf{x}(p)$ est l'image d'un sous-groupe $\mathbf{y}(p)$ de $\mathbf{b}(p)$ qui est de torsion dans ce dernier : or, $\mathbf{a}/\mathbf{n}(p)$ est libre, et on en déduit que $\mathbf{y}(p) = \mathbf{b}(p)$. □

Il est logique de procéder maintenant par disjonction des cas :

Proposition 13. *Si Φ possède une orbite compacte, alors Π est un plan rationnel (c-à-d. que μ et ν sont rationnels).*

Preuve. Si Φ possède une orbite compacte, on peut (quitte à conjuguer Φ par un difféomorphisme de $\mathbf{V}$) supposer que celle-ci passe par le point-base p_0 de $\mathbf{V}$. Soit $\mathbf{a}_\Pi$ le stabilisateur de p_0 pour Φ : comme l'espace homogène $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{a}_\Pi$ est isomorphe à notre orbite compacte (donc lui-même compact), le groupe $\mathbf{a}_\Pi$ est un réseau de $\mathbf{A}_\Pi$; de ce fait, l'injection naturelle ψ de $\mathbf{a}_\Pi$ dans $\mathbf{a} = \mathbf{a}(p_0)$ s'étend en une injection Ψ de $\mathbf{A}_\Pi$ dans $\mathbf{A}$ dont le graphe est la clôture de Zariski de celui de ψ. Nous avons vu que toute injection de $\mathbf{A}_\Pi$ dans $\mathbf{A}$ avait pour image $\mathbf{A}_\Pi$ ou un groupe qui s'en déduit par application d'un automorphisme circulaire. Les automorphismes circulaires de $\mathbf{A}$ préservant clairement $\mathbf{a}$, ils induisent des difféomorphismes de $\mathbf{V}$; de sorte qu'en conjuguant éventuellement Φ par un tel difféomorphisme, on peut supposer $\Psi(\mathbf{A}_\Pi) = \mathbf{A}_\Pi$. Alors, comme $\mathbf{A}_\Pi \cap \mathbf{a}$ est un réseau dans $\mathbf{A}_\Pi$, le plan Π doit être rationnel. $\square$

Dans le cas où Φ est sans orbite compacte, nous avons vu que les orbites de Φ devaient être denses et que $\mathbf{b}(p) \subset \mathbf{n}(p)$ (proposition 12). Nous pouvons apporter les précisions suivantes :

Proposition 14. *Si Φ est à orbites denses, après conjugaison éventuelle de Φ par un automorphisme triangulaire approprié de $\mathbf{V}$, il existera des réels b et c non-nuls et pour tout indice $\imath \in \{1,2,3\}$ et tout point p de $\mathbf{V}$ des éléments $u_\imath(p)$ de $\mathbf{C}$, $v_\imath(p)$ de $\mathbf{D}$, $w_\imath(p)$ de $\mathbf{E}$ tels que le stabilisateur de p dans $\mathbf{B}$ soit engendré par les $B_\imath^b u_\imath$, les $C_\imath^c v_\imath$, les $D_\imath^{b^2} w_\imath$ et E^{bc}.*

Preuve. Le faisceau quotient $\mathbf{b}/\mathbf{c}(p)$ admet les trois sections constantes $\beta_\imath(p)$ dont les évaluations en p_0 valent $\beta_\imath$. Par un argument déjà utilisé à la preuve de la proposition 12, il existera des éléments constants de $\mathbf{B}/\mathbf{C}$ images des $\beta_\imath(p)$. Dans $\mathbf{B}/\mathbf{D}$ et pour $\imath$ fixé, les éléments $\kappa(\beta_\imath(p))$, $\kappa(\gamma_1(p))$, $\kappa(\gamma_2(p))$ et $\kappa(\gamma_3(p))$ engendrent un réseau $\ell(p)$ qui est variable mais dont l'intersection avec $\mathbf{C}$ et la projection sur $\mathbf{B}/\mathbf{C}$ sont constantes. Une fois fixées cette intersection et cette projection, la variété $\mathbf{T}$ des réseaux possibles est un tore de dimension trois sur lequel l'action naturelle de $\mathbf{A}_\Pi$ se fait par translations le long d'orbites dont la dimension est un ou deux : précisément, cette dimension est un si $\kappa(\beta_\imath(p))$ est de la forme $B_\jmath^b$ pour un certain indice $\jmath$ et un certain réel b. Mais l'image par ℓ du groupe fondamental $\mathbf{a}$ de $\mathbf{V}$ en p_0 est monogène : donc, les $\mathbf{A}_\Pi$-orbites dans $\mathbf{T}$ ne peuvent pas êtres des tores de dimension deux ou plus, de ce fait ce sont des cercles et $\kappa(\beta_\imath(p))$ est de la forme $B_\jmath^{b_\imath}$ modulo $\mathbf{C}$ pour un certain réel $b_\imath$ et un certain indice $\jmath$. Quitte à composer Φ par un automorphisme circulaire de $\mathbf{V}$, on pourra supposer que $\jmath = \imath$.

Si la section globale $\beta_\imath(p)$ de $\mathbf{a}$ n'est pas bien déterminée modulo $\mathbf{d}(p)$, c'est que ses diverses valuations diffèrent d'une puissance de $\gamma_\imath(p)$; et de même, $B_\imath^{b_\imath}$ n'est déterminé modulo $\mathbf{D}$ qu'à un élément près du flot de $C_\imath$. Il en découle directement que $\kappa(\gamma_\imath(p))$ a la forme $C_\imath^{c_\imath}$ modulo $\mathbf{D}$. Le même argument montre, *mutatis mutandis*, que $\kappa(\delta_\imath(p))$ a la forme $D_\imath^{d_\imath}$ modulo $\mathbf{E}$. Mais on a dans le sous-groupe de $\mathbf{a}(p)$ engendré par les $\delta_\imath(p)$ l'unique contrainte $\delta_1(p)\delta_2(p)\delta_3(p) = 1$, et dans l'algèbre de Lie $\mathcal{D}$ l'unique contrainte $D_1 + D_2 + D_3 = 0$: on en tire l'égalité des constantes $d_\imath$ que l'on notera donc sans indice. Appliquant ensuite κ à l'identité suivante, valable modulo $\mathbf{e}(p)$: $[\beta_\imath(p), \beta_{\imath+1}(p)] = \delta_{\imath+2}(p)^{-1}$, nous constatons que $b_\imath b_{\imath+1} = d$; il en découle rapidement que les $b_\imath$ sont égaux.

Appliquant enfin κ à l'identité $[\beta_\imath(p), \gamma_\imath(p)] = \varepsilon_\imath(p)^{-1}$, nous obtenons $bc_\imath = e$, d'où l'égalité des $c_\imath$ et les égalités $d = b^2$ et $e = bc$.

IV. Enoncés et preuves.

Nous allons maintenant montrer les résultats suivants :

Théorème A. *Il existe une Φ-orbite compacte si et seulement si Π est rationnel, et dans ce cas les orbites compactes de Φ forment une famille non-dénombrable.*

Théorème B. *Si Π est irrationnel, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_\Pi$ sont C^∞-conjugués et Φ préserve une forme de volume de classe C^∞.*

La classification topologique des feuilletages de codimension un des variétés compactes obtenus sous l'action de groupes de Lie nilpotents, établie par Ghys, Hector et Moriyama dans [**GHM**], ne laissait pas prévoir une telle rigidité : de fait, celle-ci n'a déjà pas lieu dans le cas abélien. On aurait d'ailleurs pu s'attendre, vu ce qui est connu dudit cas abélien (notamment la classification des flots sur le tore : cf. [**AA**]) à ce qu'un critère d'existence d'une conjugaison C^∞ de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}_\Pi$ *sous l'hypothèse d'existence a priori d'une conjugaison topologique* dût contenir le terme "diophantien" (ou le nom d'une notion voisine issue de l'approximation diophantienne), terme appliqué à un invariant de $\mathcal{F}$ qu'il se serait agi de construire, du type "nombre de rotation asymptotique" ; de même pour le volume invariant lisse, qui n'existe pas nécessairement dans le cas abélien même lorsque les orbites sont *a priori* supposées denses. Quant à l'invariant "de type diophantien" dont nous venons d'évoquer l'existence, il se dissimule dans le premier groupe de cohomologie feuilletée de $\mathcal{F}_\Pi$ (se reporter aux preuves à venir pour plus d'explications) :

Théorème C. *Si l'application naturelle de $H^1(\mathcal{A}_\Pi)$ dans $H^1(\mathcal{F}_\Pi)$ est surjective, alors Φ et Φ_Π sont elles-mêmes C^∞-conjuguées.*

Nous admettrons sans preuve les faits suivants : le critère dont le théorème C fait mention a lieu pour Π générique au sens de Lebesgue ; ce critère est invariant sous l'action sur l'espace des Π du groupe des matrices rationnelles diagonales de taille 3×3 ; l'ensemble des Π pour lesquels le critère n'a pas lieu a quand même la puissance du continu et il est partout dense dans l'ensemble de tous les plans considérés. Montrer tout ceci dans notre contexte si particulier constituerait un inutile pensum technique et nous publierons bientôt une note impliquant ce que nous venons d'admettre et qui portera sur $H^1(\mathcal{F})$ pour une bien plus vaste classe de feuilletages.

Preuve des théorèmes. Le théorème A découle du théorème B, car celui-ci proclame que si Π n'est pas rationnel, Φ est à orbites denses ; et nous savions déjà que si Φ n'est pas à orbites denses, alors Π est rationnel.

Montrons le théorème B. Nous supposons donc ici Φ à orbites denses. Le groupe de Lie $\mathbf{B}/\mathbf{D}$ est abélien et il est utile de le voir comme un espace vectoriel. Soit $\mathbf{W}$ la variété des réseaux de $\mathbf{B}/\mathbf{D}$ qui coupent $\mathbf{C}/\mathbf{D}$ selon le réseau fixé $c.\mathbf{c}/\mathbf{d}$ et se projettent sur $\mathbf{B}/\mathbf{C}$ en le réseau fixé $b.\mathbf{b}/\mathbf{c}$ (les constantes b et c sont celles de la proposition 14). On n'a nulle peine à voir que $\mathbf{W}$ est un tore affine de dimension 9. Le choix d'une origine particulière $\mathbf{O}$ fait de ce tore affine un groupe de Lie : ce choix revient à celui de trois éléments g_1, g_2, g_3 du réseau $\mathbf{O}$ de $\mathbf{B}/\mathbf{D}$ se projetant respectivement sur les classes modulo $\mathbf{C}$ de $b\beta_1, b\beta_2, b\beta_3$. Pour tout autre élément $\mathbf{O}'$ de $\mathbf{W}$, il existera des réels $u_\imath^\jmath$ définis modulo 1 pour lesquels les éléments g_1', g_2', g_3' de $\mathbf{O}'$ se projetant eux-mêmes sur $b\beta_1, b\beta_2, b\beta_3$ seront de la forme $g_\imath' = g_\imath + c\sum_{k=1}^3 u_\imath^\jmath \gamma_\jmath$. L'action naturelle Θ de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{W}$ se laisse aisément déterminer : sa restriction à $\mathbf{B}$ est triviale et la différentielle de Θ transporte le champ $A_\imath$ sur $A_\imath^0 = a^{-1}\frac{\partial}{\partial u_\imath^\imath}$ où $a = b^{-1}c$, de sorte que la $\mathbf{A}$-orbite de $\mathbf{O}$ est un tore $\mathbf{T}$ de dimension 3 isomorphe au quotient $\mathbf{A}/\mathbf{B}\mathbf{a}''$ où $\mathbf{a}''$ est le réseau de $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ engendré par $\exp(aA_1)$, $\exp(aA_2)$ et $\exp(aA_3)$. Pour identifier le groupe fondamental de $\mathbf{T}$ à $\mathbf{Z}^3$, on associera à $(p,q,r) \in \mathbf{Z}^3$ le lacet $t \to \Theta(\exp(patA_1^0 + qatA_2^0 + ratA_3^0), \mathbf{O})$ de $\pi_1(\mathbf{T}, \mathbf{O})$. Les $\mathbf{A}_\Pi$-orbites tracent sur $\mathbf{T}$ un feuilletage en surfaces $\mathcal{F}_\Pi^0$ qui, dans les coordonnées naturelles (u_1^1, u_2^2, u_3^3) sur $\mathbf{T}$, est décrit par l'équation de Pfaff $du_3^3 = \mu du_1^1 + \nu du_2^2$. Définissons maintenant l'application ℓ de classe C^∞ de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$ qui associe à tout point p la projection sur $\mathbf{B}/\mathbf{D}$ de son stabilisateur dans $\mathbf{B}$ pour Φ ; prenons pour origine $\mathbf{O}$ l'image par ℓ du point-base p_0 de $\mathbf{V}$; constatons que ℓ satisfait la condition d'équivariance $\ell(\Phi(x,p)) = \Theta(x, \ell(p))$ pour tout $x \in \mathbf{A}_\Pi$ et tout $p \in \mathbf{V}$. Il s'ensuit déjà que ℓ est constante le long des $\Phi(B)$-orbites, que son image est compacte dans $\mathbf{T}$ et que le rang de ℓ est constant (car constant le long des Φ-orbites, qui sont denses). Ce rang n'est pas deux car l'image de $\mathbf{a} = \pi_1(\mathbf{V})$ dans $\pi_1(\mathbf{T})$, facile à calculer, est $2\mathbf{Z}^3$. Il s'ensuit que ℓ se factorise sous la forme $\nu \circ \ell'$ où ν est l'isogénie de $\mathbf{T}$ obtenue en multipliant par deux et ℓ' une fibration localement triviale de $\mathbf{V}$ sur $\mathbf{T}$ dont les fibres sont les $\Phi(\mathbf{B})$-orbites. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est ainsi réalisé comme la préimage du feuilletage $\mathcal{F}_\Pi^0$. De là découle que tous les $\mathcal{F}$ possibles sont C^∞-conjugués les uns aux autres ; on peut d'ailleurs décrire leur construction sans faire référence à Φ : ainsi, soit $\mathcal{G}$ le feuilletage de la variété $\mathbf{X} = (\mathbf{B}/\mathbf{b}) \times \mathbf{R}^3$ dont les feuilles sont les produits des horizontales $\mathbf{B}/\mathbf{b}$ par les plans affines dont une équation est du type $z = \mu x + \nu y + c$; soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$; soit $\sigma_\imath$ le difféomorphisme de $\mathbf{X}$ donné par $\sigma_\imath(p, \vec{v}) = (\tau_\imath(p), \vec{v} + \vec{e}_\imath)$: les $\sigma_\imath$ commutent deux à deux et engendrent un groupe abélien libre $\mathcal{L}$ de difféomorphismes de $\mathbf{X}$ qui préserve $\mathcal{G}$; par construction, l'espace feuilleté quotient de $\mathbf{X}$ par $\mathcal{L}$ est une variété feuilletée difféomorphe à $(\mathbf{V}, \mathcal{F})$.

Passons-en au volume invariant. La forme fermée $du_3^3 - \mu du_1^1 - \nu du_2^2$ sur $\mathbf{T}$ peut se tirer en arrière par l'application ℓ définie tout à l'heure pour nous fournir une forme fermée non-singulière ω de classe C^∞ sur $\mathbf{V}$ et dont le noyau est en tout point l'espace tangent à l'orbite de Φ qui y passe. Soit Ω un élément de volume sur $\mathbf{A}_\Pi$ qui soit invariant par translations à droite et à gauche (un tel Ω existe car $\mathbf{A}_\Pi$ est nilpotent ; cf. **[Ra]**, I). Nous pouvons pousser en avant la forme invariante à droite Ω via la différentielle de Φ en un champ $[\Omega]$ de classe C^∞ d'éléments de volume feuilletés, et le produit extérieur $[\Omega] \wedge \omega$ est le volume global invariant par Φ souhaité.

Passons-en à la preuve du théorème C. L'algèbre de cohomologie $H^*(\mathcal{G})$ d'un feuilletage $\mathcal{G}$ a été introduite par Heitsch dans **[Hei]** et calculée dans ce même article sur plusieurs exemples dont celui des flots linéaires sur le tore-surface. On se bornera ici à rappeler qu'une 1-forme feuilletée est une 1-forme différentielle sur $\mathbf{V}$ qui n'est définie qu'en restriction au fibré tangent $T\mathcal{F}_\Pi$ de $\mathcal{F}_\Pi$; on renvoie le lecteur à la source pour les définitions de la différentielle feuilletée de $\mathcal{F}_\Pi$. Soit d'autre part $H^*(\mathcal{A}_\Pi)$ l'algèbre de cohomologie ordinaire de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_\Pi$: on sait que $H^1(\mathcal{A}_\Pi)$ s'identifie à l'espace des applications linéaires de $\mathcal{A}_\Pi$ dans $\mathbf{R}$ qui sont nulles sur $\mathcal{C}$. Nous noterons α l'élément spécial de $H^1(\mathcal{A}_\Pi)$ qui vaut μ sur A_1', ν sur A_2' et s'annule sur $\mathcal{B}$; nous noterons β l'élément spécial de $H^1(\mathcal{A}_\Pi)$ qui vaut 0 sur A_1', A_2', B_1, B_2 et est tel que $\beta(B_3) = 1$. Soit ensuite $X \in \mathcal{A}_\Pi$: par la différentielle de Φ, on peut transporter X en un champ de vecteurs X^* sur $\mathbf{V}$ tangent au groupe à un paramètre $\Phi(X^t)$ de difféomorphismes de cette variété (un tel champ est dit *champ fondamental* de Φ). L'image $(X_1^*, \ldots, X_{11}^*)$ de toute base de $\mathcal{A}_\Pi$ par ce procédé fournit un parallélisme sur $T\mathcal{F}_\Pi$ et si $Y = \sum_{k=1}^{11} f_k(p)X_k^*$ est une section quelconque de ce fibré, si ω est une forme linéaire sur $\mathcal{A}_\Pi$, on peut ensuite associer à ω une 1-forme ω^* sur $\mathbf{V}$ en posant $\omega^*(Y)(p) = \sum_{k=1}^{11} f_k(p)\omega(X_k)$; cette application en induit une de $H^1(\mathcal{A}_\Pi)$ dans $H^1(\mathcal{F}_\Pi)$ (celle dont l'hypothèse du théorème C fait mention).

Nommons désormais $\mathbf{W}$ l'espace homogène des réseaux de $\mathbf{B}$ qui sont isomorphes à $\mathbf{b}$ et ℓ l'application qui, au point p de $\mathbf{V}$, associe son stabilisateur dans $\mathbf{B}$ pour Φ : comme nous l'avions fait pour l'ancienne ℓ, nous voyons sans peine que cette nouvelle ℓ est une fibration localement triviale dont les fibres sont cette fois-ci les $\Phi(\mathbf{D})$-orbites tandis que la base $\mathbf{X}$ en est une nilvariété de dimension 9 sur laquelle $\mathbf{A}$ agit transitivement. Cette action de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{X}$ a elle-même des champs fondamentaux : et si $Y \in \mathcal{A}$, nous noterons Y° le champ correspondant. Evidemment, pour $Y \in \mathcal{A}_\Pi$, nous avons $d\ell(Y^*) = Y^\circ$. Relevons le champ A_3° en un champ A_3 sur $\mathbf{V}$ au moyen d'une connexion arbitraire. Les champs $A_1^\circ, A_2^\circ, A_3^\circ, \ldots, E^\circ$ satisfont aux mêmes relations de crochet que leurs antécédents dans $\mathcal{A}$, et les trois derniers de la liste (D_1°, D_2° et E°) sont de plus nuls : d'où la formule $[A_3^\circ, X^\circ] = \beta(X)C_3^\circ$ pour tout X dans $\mathcal{A}$. En relevant ceci à $\mathbf{V}$, on conclut qu'il existe des 1-formes feuilletées $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sur $\mathbf{V}$ telles que

$$[A_3, X^*] = \beta(X)C_3^* + \omega_1(X^*)D_1^* + \omega_2(X^*)D_2^* + \omega_3(X^*)E^*.$$

Ecrivons maintenant l'identité de Jacobi :

$$[A_3, [X^*, Y^*]] = [[A_3, X^*], Y^*] + [X^*, [A_3, Y^*]]$$

et développons grâce à la formule précédente ; nous trouvons tous calculs faits

$$\omega_1([X^*, Y^*]) = L_{X^*}\omega_1(Y^*) - L_{Y^*}\omega_1(X^*) + \alpha(Y)\beta(X) - \alpha(X)\beta(Y)$$

et deux autres équations qui, en termes de différentielle feuilletée, peuvent s'énoncer

$$d_{\mathcal{F}_\Pi}\omega_1 = d_{\mathcal{F}_\Pi}\omega_2 = -\alpha^* \wedge \beta^*, \quad d_{\mathcal{F}_\Pi}\omega_3 = 0.$$

Nous allons nous servir du volume invariant Ω dont le théorème B fait mention ; nous le normalisons de sorte que $\int_{\mathbf{V}} \Omega = 1$. A toute forme feuilletée ω, nous pouvons maintenant associer sa moyenne $[\omega] = \int_{\mathbf{V}} \omega(p)d\Omega(p)$ (on voit ici ω comme une application de classe C^∞ à valeurs dans l'algèbre extérieure de $\mathcal{A}_\Pi$). Nous noterons $\{\omega\} = \omega - [\omega]$. Du fait que $\int_{\mathbf{V}} \Omega = 1$, on a $[[\omega]] = [\omega]$ et $[\{\omega\}] = 0$.

Remarquons enfin que, de l'invariance de Ω par Φ, il découle que pour tout $X \in \mathcal{A}_\Pi$ et toute application f de classe C^∞ de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{R}$, on a $[L_{X^*} f] = 0$. En particulier, considérons l'expression sur deux champs fondamentaux de Φ de la différentielle feuilletée d'une 1-forme :

$$d_{\mathcal{F}_\Pi}\omega(X^*, Y^*) = \omega([X^*, Y^*]) - L_{X^*}\omega(Y^*) + L_{Y^*}\omega(X^*).$$

En passant à la moyenne, les deux derniers termes de la somme s'annulleront ; nous pouvons aussi bien écrire leurs moyennes nulles comme les dérivées de constantes, soit $L_{X^*}[\omega(Y^*)]$ et $L_{Y^*}[\omega(X^*)]$: ce qui nous mène finalement à l'égalité

$$[d_{\mathcal{F}_\Pi}\omega(X^*, Y^*)] = [\omega([X^*, Y^*])] = (d_{\mathcal{F}_\Pi}[\omega])(X^*, Y^*).$$

Ainsi : $\{d_{\mathcal{F}_\Pi}\omega\} = d_{\mathcal{F}_\Pi}\{\omega\}$. Ceci nous mène à conclure que $d_{\mathcal{F}_\Pi}\{\omega_\imath\} = 0$. Si l'hypothèse du théorème C est satisfaite, il existera donc pour tout $\imath$ une application $f_\imath$ de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que $\{\omega_\imath\} - d_{\mathcal{F}} f_\imath$ soit une forme constante ; mais comme sa moyenne est nulle, cette constante est nulle, et $\{\omega_\imath\} = d_{\mathcal{F}} f_\imath$. Posons maintenant $A_3^* = A_3 + f_1 D_1 + f_2 D_2 + f_3 E$ et $\omega_\imath^0 = \omega_\imath - d_{\mathcal{F}} f_\imath$. Un calcul direct montre que pour tout $X \in \mathcal{A}_\Pi$,

$$[A_3^*, X^*] = \beta(X) C_3 + \omega_1^0(X) D_1 + \omega_2^0(X) D_2 + \omega_3^0(X) E$$

où les coefficients sont constants. Ainsi, l'espace vectoriel de champs de vecteurs engendré par $\mathcal{A}_\Pi$ et A_3^* sur $\mathbf{V}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension douze dont on n'a aucun mal à vérifier la nilpotence. Cette algèbre s'intègre en un groupe de Lie nilpotent transitif $\mathbf{G}$ de difféomorphismes de $\mathbf{V}$ qui contient un réseau isomorphe à $\mathbf{a}$ (groupe fondamental de $\mathbf{V}$), donc est isomorphe à $\mathbf{A}$ par le théorème de Malcev. Les plongements de $\mathbf{A}_\Pi$ dans $\mathbf{A}$ sont connus et à automorphisme triangulaire près, à composition près par un automorphisme de $\mathbf{A}_\Pi$, il n'y en a qu'un. Ceci prouve que les actions Φ et Φ_Π sont conjuguées.

Remarque conclusive. Les énoncés de ce texte ne sont pas numérotés dans le style "1.1.1, 1.1.2..." et la bibliographie en est plus que sommaire. Du coup, le lecteur doit fournir un effort pour comprendre : il ne peut lire en dormant... Mais il y aurait de l'hypocrisie à prétendre qu'un tel texte, de toutes façons, pût s'adresser à quelqu'un qui ignorât tout du domaine et aurait eu soudain, comme par enchantement, cette idée saugrenue de s'y mettre : autant imaginer qu'un extraterrestre à grandes oreilles débarquât soudain sur cette planète qui est la nôtre grand connaisseur de la musique baroque ou du quatuor à cordes... Comme disait Schopenhauer : ce n'est pas aux chênes qu'il pousse des abricots. Poussant cette idée, j'en arrive à conclure que la plupart du temps, sous des dehors éminemment publicitaires, nous n'écrivons que pour nous-mêmes. Cependant, il peut y avoir une justification plus noble de notre activité publiante que celle qui consisterait à brâmer cyniquement le slogan "publish or perish" : et cette justification (qui sert de morale à des poètes de France comme à des musiciens du Japon) est, dans les mots même de Mallarmé : "c'est en créant que je me crée". Cette face-là de l'activité scientifique ou artistique (créer pour progresser), nos patrons l'ignorent superbement : qu'un chercheur pût prendre plaisir à sa tâche et devenir meilleur en s'y exerçant sans relâche, si on le leur allait révéler, voilà qui les perturberait ; voilà qui ne serait à leurs yeux ni rentable ni moral, et voilà bien surtout qui va devoir cesser : il faudra, désormais, que le robot à trouvailles oublie son plaisir et ne travaille que par devoir ou intérêt – non, donc, par loisir. Mais c'est méconnaître que la créativité est fille de la joie et que, comme écrivait Russell : *la plupart des philosophes pensent mieux lorsqu'ils sont convenablement nourris que lorsque la faim les a rendus fous, et aucune règle n'indique que d'intenses souffrances rendent les hommes sages.*

Reste bien l'éternelle question : à quoi donc peut servir la recherche, et si c'est à rien, à quoi bon pour l'état investir dans celle-ci ? Poincaré était de ceux qui pensaient qu'une telle question ne méritât point de réponse.

Références

[**AA**] D.V. Anosov, V.I. Arnold (Eds.), *dynamical systems I*, EMS 1 (1988), Springer-Verlag.

[**Gh**] E. Ghys, *actions localement libres du groupe affine*, Invent. Math. 82 (1985), 479-526.

[**GHM**] E. Ghys, G. Hector, Y. Moryama, *on codimension one nilmanifolds and a theorem of Malcev*, Topology 28 (1989), 197-210.

[**Go**] C. Godbillon, *feuilletages*, PM 98 (1991), Birkhaüser.

[**Hei**] J.L. Heitsch, *a cohomology for foliated manifolds*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 197-218.

[**Hel**] S. Helgason, *differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press (1978).

[**Ra**] M. S. Raghunathan, *discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete n° 68 (1972), Springer-Verlag.