PUB. IRMA, LILLE 2009
Vol. 69, N° I

Transformations des lois multivariées avec queues régulières

Youri Davydov [a], Shuyan Liu [a]

Abstract

Let X be a random vector in $\mathbb{R}^d$ with a regularly varying tail. We consider two transformations $\|X\|f(\frac{X}{\|X\|})$, $f : S^{d-1} \to S^{d-1}$, and $Xf(\frac{X}{\|X\|})$, $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}_+$. Some sufficient conditions for preserving the property of regularity of the tail for this kind of transformations are given.

Résumé

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ à queue à variation régulière. On considère deux transformations $\|X\|f(\frac{X}{\|X\|})$, $f : S^{d-1} \to S^{d-1}$, et $Xf(\frac{X}{\|X\|})$, $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}_+$. Nous donnons des conditions suffisantes pour que la propriété de régularité de la queue soit préservée sous les transformations de ce type.

AMS Classifications : 60B10, 60E05, 60E07, 60F05.

Key words and phrases. variation régulière, loi stable multivariée, mesure spectrale.

a . Laboratoire P. Painlevé, UMR 8524 CNRS Université Lille I, Bât M2, Cité Scientifique, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.

1 Introduction

Variation régulière est un des concepts de base qui apparaît de façon naturelle dans les différents contextes de la théorie des probabilités et ses applications. On renvoie le lecteur aux monographies de Feller [8], de Araujo & giné[1], de Resnick [13] et de Bingham et al. [3] pour la présentation exhaustive de la matière. Pour souligner l'importance de cette notion rappelons qu'elle est liée étroitement avec la caractérisation des domaines d'attraction des lois stables multidimensionnelles (voir Araujo et al. [1], Samorodnitsky et al. [15] et Davydov et al. [7]). On trouve plusieurs informations sur les propriétés et les applications dans les articles récents de Mikosch [11], Basrak et al. [2] et Jacobsen et al. [9]. Rappelons d'abord la définition.

Définition 1.1. *La loi du vecteur aléatoire (v.a.) X dans $\mathbb{R}^d$ est dite* à queue à variation régulière *si il existe une mesure finie σ sur la sphère unité S^{d-1}, un nombre $\alpha > 0$ et une fonction L à variation lente tels que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{L(x)} \mathbf{P}\left\{ \frac{X}{\|X\|} \in B, \|X\| > x \right\} = \sigma(B) \tag{1.1}$$

pour tous $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ avec $\sigma(\partial B) = 0$; ici $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

On appelle σ *mesure spectrale* de X, et α s'appelle *exposant de variation régulière.*

Le fait que X est à queue à variation régulière sera dans la suite noté par l'écriture "$X \in \mathrm{VR}(\alpha, \sigma)$".

Il est clair que sans perdre la généralité on peut considérer σ comme une mesure normalisée : $\sigma(S^{d-1}) = 1$. En prenant dans (1.1) $B = S^{d-1}$, on déduit immédiatement que

$$\frac{x^\alpha}{L(x)} \mathbf{P}\{\|X\| > x\} \to 1,\ x \to \infty, \tag{1.2}$$

c'est-à-dire que $\|X\|$ est la variable aléatoire positive à queue à variation régulière.

Les relations (1.1) et (1.2) donnent

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{X}{\|X\|} \in B \;\middle|\; \|X\| > x \right\} \to \sigma(B),\ x \to \infty,$$

pour tous $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ avec $\sigma(\partial B) = 0$, ce qui signifie que la loi conditionnelle de $\frac{X}{\|X\|}$ sachant $\{\|X\| > x\}$ converge faiblement vers σ.

Il existent des différentes caractérisations de la propriété $X \in \mathrm{VR}(\alpha, \sigma)$ (voir, i.e. Mikosch [11]), on n'en donne ici que deux.

1. Le v.a. $X \in \mathrm{VR}(\alpha, \sigma)$ si et seulement si il existe une fonction $\tilde{L}$ à variation lente telle que pour tous $r > 0$ et $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ avec $\sigma(\partial B) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}\left\{ \frac{X}{\|X\|} \in B, \|X\| > rb_n \right\} = \sigma(B) r^{-\alpha} \tag{1.3}$$

avec $b_n = n^{1/\alpha}\tilde{L}(n)$.

2. Pour formuler le deuxième critère on passe aux coordonnées polaires et identifie $\mathbb{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ avec le produit $(0,\infty) \times S^{d-1}$. On introduit les mesures Q_n et Q sur $\mathcal{B}((0,\infty)\times S^{d-1})$ par

$$Q_n((r,\infty)\times B) = n\mathbf{P}\left\{\frac{X}{\|X\|} \in B, \|X\| > rb_n\right\}, \tag{1.4}$$

$$Q = m_\alpha \times \sigma, \tag{1.5}$$

où $m_\alpha(dr) = \alpha r^{-\alpha-1}dr$.

Alors $X \in \mathrm{VR}(\alpha,\sigma)$ est équivalent à la convergence vague

$$Q_n \overset{vag}{\to} Q, \quad n \to \infty. \tag{1.6}$$

Soit $\mathcal{S}_+$ la famille des fonctions définies sur $(0,\infty)\times S^{d-1}$ dont les supports sont séparés de zéro, c'est-à-dire $f \in \mathcal{S}_+$ si et seulement si $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset [\varepsilon,\infty)\times S^{d-1}$.

Il n'est pas difficile à remarquer que la convergence en (1.6) entraine la convergence

$$\int f dQ_n \to \int f dQ \tag{1.7}$$

pour toute $f \in \mathcal{S}_+$ qui est bornée et Q-p.p. continue.

D'autre part pour établir (1.6) il suffit de vérifier (1.7) pour toutes $f \in \mathcal{S}_+$ continues bornées.

La variation régulière a la propriété importante qu'elle est préservée sous plusieurs oprérations et transformations qu'on utilise souvent en pratique. Une large collection des résultats de ce type est présentée dans le survey de Jessen et Mikosch [10].

Le but de notre travail est de compléter les investigations dans cette direction. On considère ici deux genres des transformations. Premièrement, on étudie le passage du v.a. initial X au vecteur $Y = \|X\| f(\frac{X}{\|X\|})$ où f est une application de S^{d-1} à S^{d-1}. Dans le deuxième cas on transforme la partie radiale de X, plus exactement on s'intéresse à la variation régulière du vecteur $Y = Xf(\frac{X}{\|X\|})$, où la fonction f cette fois-ci est une application de S^{d-1} à $\mathbb{R}_+$. On propose des conditions suffisantes et on donne des exemples qui montrent que ces conditions ne pourront être affaiblies sensiblement. En conclusion remarquons que les propriétés des transformations présentées ici seront utiles pour les simulations des vecteurs appartenant au domaine d'attraction d'une loi stable avec la mesure spectrale donnée. Dans ce contexte on peut mentionner les articles de Chambers et al. [5] et de Modarres et al. [12].

2 Résultats

2.1. Soit X un v.a. dans $\mathbb{R}^d$ ayant la queue à variation régulière et $(\|X\|, \frac{X}{\|X\|})$ sa décomposition polaire. On va d'abord s'intéresser aux transformations qui ne changent que la partie sphérique de X. Plus exactement on prend une application mesurable $f : S^{d-1} \to S^{d-1}$ et on définit le nouveau vecteur $Y = \|X\| f(\frac{X}{\|X\|})$. Il est clair qu'en coordonées polaires $Y = (\|X\|, f(\frac{X}{\|X\|}))$. Sous quelles conditions Y reste-t-il encore le vecteur avec la queue régulière ? Quelle est la mesure spectrale de ce nouveau vecteur ? Le théorème suivant répond à ces questions.

Théorème 2.1. *Soit X un v.a. dans $\mathbb{R}^d$ tel que la condition de variation régulière (1.1) a lieu avec l'exposant α et la mesure spectrale σ. Soit f une application σ-p.p. continue sur S^{d-1} à valeurs dans S^{d-1}, et μ est la mesure image définie par $\mu = \sigma f^{-1}$. Alors le v.a. transformé $Y = (\|X\|, f(\frac{X}{\|X\|}))$ a la queue à variation régulière de même exposant que X et de la mesure spectrale μ.*

Démonstration: Prenons $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ tel que $\mu(\partial B) = 0$. Alors $\forall r > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{x^\alpha}{L(x)} \mathbf{P}\left\{\frac{Y}{\|Y\|} \in B, \|Y\| > x\right\} &= \frac{x^\alpha}{L(x)} \mathbf{P}\left\{f\left(\frac{X}{\|X\|}\right) \in B, \|X\| > x\right\} \\
&= \frac{x^\alpha}{L(x)} \mathbf{P}\left\{\frac{X}{\|X\|} \in f^{-1}(B), \|X\| > x\right\}.
\end{aligned}$$

Pour que le dernier terme converge vers $\mu(B) r^{-\alpha}$, il suffit d'assurer grâce à (1.1) que $\sigma(\partial f^{-1}(B)) = 0$. Notons D l'ensemble des discontinuités de f, alors $\sigma(D) = 0$. On va montrer que

$$\partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B) \cup D. \tag{2.8}$$

Si $x \in \partial f^{-1}(B) \backslash D$ alors f est continue en x. Comme $x \in \partial f^{-1}(B)$, il existe deux suites $x_n \in f^{-1}(B)$ et $y_n \in f^{-1}(B)^{\complement}$, $n = 1, 2, \ldots$, telles que $x_n \to x$ et $y_n \to x$. On en déduit

$$f(x_n) \to f(x), \;\; f(x_n) \in B$$

et

$$f(y_n) \to f(x), \;\; f(y_n) \notin B.$$

Cela implique $f(x) \in \partial B$, ainsi $x \in f^{-1}(\partial B)$ d'où (2.8). Puisque $\mu(\partial B) = \sigma f^{-1}(\partial B) = 0$, on en déduit

$$\sigma(\partial f^{-1}(B)) \leq \sigma f^{-1}(\partial B) + \sigma(D) = 0$$

qui complète la démonstration. □

Corollaire 2.2. *Soit X un v.a. dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie la condition de variation régulière (1.1) avec l'exposant α et la mesure spectrale σ. On identifie S^1 avec l'intervalle $[0, 2\pi)$ et on suppose que la mesure spectrale de X est uniforme, c'est-à-dire $d\sigma/d\theta = 1/2\pi$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Soit μ une mesure de probabilité sur S^{d-1} avec la fonction de répartition $F(x) = \mu([0, x]), x \in [0, 2\pi)$. Si Y est un v.a. défini par $Y = (\|X\|, F^{-1}(\frac{X}{2\pi\|X\|}))$ où F^{-1} est la fonction de quantile correspondant à F, alors Y vérifie la condition de régularité avec la mesure spectrale μ.*

Remarque 1. Ce corollaire montre avec évidence l'utilité des applications du théorème 2.1 au problème de simulation.

Remarque 2. La condition de continuité de f σ-p.p. est importante. L'exemple suivant montre que le résultat du théorème 2.1 n'est plus vrai si l'on omet cette condition.

Exemple 1. Soient F_1 et F_2 deux lois définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

1. la loi F_i n'a pas de queue à variation régulière, $i = 1, 2$,
2. la loi $F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ a la queue à variation régulière avec l'exposant α et les constantes de normalisation b_n.

Soient $\{1/n\}$ et $\{-1/n\}$ deux suites des points sur la sphère unité $S^1 = (-\pi, \pi]$, notées $\{x_n^+\}$ et $\{x_n^-\}$. Soit $l_n^\pm$ la demi-droite sortant de 0 et passant par le point $x_n^\pm$. Définissons deux suites des segments $\{\Delta_n^+\}$ et $\{\Delta_n^-\}$ par $\Delta_n^\pm = l_n^\pm \cap ((-\pi, \pi] \times [n, n+1))$. Soit $\mathbf{P}$ la loi sur $(-\pi, \pi] \times (\mathbb{R}_+ \backslash \{0\})$ définie de la façon suivante : son support est la réunion de tous les intervalles $\Delta_i^\pm$, $i = 1, 2, \ldots$, et la restriction de $\mathbf{P}$ sur $\bigcup_{i=1}^\infty \Delta_i^+$ (respectivement sur $\bigcup_{i=1}^\infty \Delta_i^-$) coïncide avec $1/2F_1$ transférée sur l_n^+ (respectivement avec $1/2F_2$ transférée sur l_n^-). Soit X un v.a. de la loi $\mathbf{P}$. On vérifie facilement que $\mathbf{P}$ est la loi ayant la queue régulière avec b_n comme les constantes de normalisation dont la mesure spectra le est $\sigma = \delta_{\{0\}}$.

Si l'on définit $f : (-\pi, \pi] \to (-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0, \end{cases}$$

on obtient que $\sigma f^{-1} = \sigma$ tandis que $Y = (\|X\|, f(\frac{X}{\|X\|}))$ n'a pas de queue régulière. Réellement, par exemple, on a pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} n\mathbf{P}\left\{\frac{Y}{\|Y\|} \in (\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon), \|Y\| > rb_n\right\} &= n\mathbf{P}\left\{\frac{X}{\|X\|} \in (0, \pi], \|X\| > rb_n\right\} \\ &= n(1 - F_1(rb_n)) \end{aligned}$$

qui ne converge nulle part par le choix de F_1.

2.2. On considère maintenant les transformations ne modifiant que la partie radiale du vecteur initial. Etant donné une fonction $h : S^{d-1} \to \mathbb{R}_+$ on définit le nouveau vecteur aléatoire $Y = Xh(\frac{X}{\|X\|}) = (\|X\|h(\frac{X}{\|X\|}), \frac{X}{\|X\|})$. Le résultat suivant donne les conditions sous lesquelles la propriété de régularité de queue soit préservée.

Théorème 2.3. *Soit X un v.a. dans $\mathbb{R}^d$ ayant la queue régulière d'exposant α avec la mesure spectrale σ. Soit h une fonction σ-p.p. continue et bornée sur S^{d-1} à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, μ une mesure finie sur S^{d-1} avec la densité $h(x)^\alpha$*

par rapport à σ. Alors le v.a. $Y = (\|X\|h(\frac{X}{\|X\|}), \frac{X}{\|X\|})$ a la queue à variation régulière de même exposant α et de mesure spectrale μ.

La démonstration est reportée dans la section suivante.

Les deux contre-exemples ci-dessous montrent que la condition que h est σ-p.p. continue et bornée est réellement importante pour préserver la régularité. L'exemple 2 présente une fonction h σ-p.p. continue mais non-bornée pour laquelle le résultat du théorème 2.3 n'a pas lieu, tandis que la fonction h de l'exemple 3 sera bornée mais non σ-p.p. continue.

Exemple 2. *Définition de X.* Soit τ une mesure discrète sur S^1 définie par

$$\tau(\{b_k\}) = q_k = \frac{1}{k(k+1)},\ b_k = \pi - \frac{\pi}{2^{k-1}},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Il est clair que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k = 1$ et $b_k \in [0, \pi)$. Notons L_k la demi-droite sortant de 0 et passant par le point b_k, c'est-à-dire $L_k = \{cb_k, c > 0\}$. Soit Q_k une mesure sur L_k dont la fonction de répartition est définie par

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 - k^{-\nu}x^{-\alpha} & x \geq 1 \end{cases}$$

où $\nu > 0,\ k = 1, 2, \ldots$. Supposons que X soit un v.a. dans $\mathbb{R}^2$ de la loi $\mathbf{P}$ définie par :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k Q_k(A \cap L_k),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Définissons la mesure σ sur S^1 par

$$\sigma(B) = \sum_{\{k | b_k \in B\}} q_k k^{-\nu},\ B \in \mathcal{B}(S^1). \tag{2.9}$$

Cette mesure est bien définie car $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k k^{-\nu} < 1$. Maintenant pour tous $B \in \mathcal{B}(S^1)$ avec $\sigma(\partial B) = 0$ et $\forall r > 1$ on a

$$\begin{aligned} r^{\alpha}\mathbf{P}\left\{\frac{X}{\|X\|} \in B, \|X\| > r\right\} &= \sum_{\{k|b_k \in B\}} r^{\alpha}\mathbf{P}\left\{\frac{X}{\|X\|} = b_k, \|X\| > r\right\} \\ &= r^{\alpha} \sum_{\{k|b_k \in B\}} q_k(1 - F_k(r)) \\ &= r^{\alpha}r^{-\alpha} \sum_{\{k|b_k \in B\}} q_k k^{-\nu} \\ &= \sigma(B). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Cela signifie que X a la loi avec la queue régulière d'exposant α et de mesure spectrale σ.

On passe à la construction de notre function h. Prenons les intervalles I_k, $k = 1, 2, \ldots$ sur $S^1 = [0, 2\pi)$

$$I_1 = (\frac{7\pi}{4}, 2\pi) \cup [0, \frac{\pi}{4}), \;\; I_k = (b_k - \frac{\pi}{2^{k+1}}, \;\; b_k + \frac{\pi}{2^{k+1}}), \;\; k \geq 2.$$

Puisque la distance entre b_k et b_{k+1} est $\frac{\pi}{2^k}$, les intervalles $I_1, I_2, \ldots$ sont disjoints et $b_k \in I_k$ pour chaque k. Notre fonction h est définie par

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} \mathbb{1}_{I_k}(x), \tag{2.11}$$

où β est tel que $\frac{1}{\alpha} < \beta < \frac{1+\nu}{\alpha}$. Évidemment h est σ-p.p. continue et non-bornée. Si $Y = Xh(\frac{X}{\|X\|})$, alors pour $\forall r > 1$

$$\begin{aligned} r^{\alpha}\mathbf{P}\left\{\frac{Y}{\|Y\|} \in S^1, \|Y\| > r\right\} &= r^{\alpha}\mathbf{P}\left\{\|X\| h\left(\frac{X}{\|X\|}\right) > r\right\} \\ &= r^{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{X}{\|X\|} = b_k, \|X\| > \frac{r}{k^{\beta}}\right\} \\ &\geq r^{\alpha}\sum_{\{k \mid \frac{r}{k^{\beta}} < 1\}}\frac{1}{k(k+1)} \\ &\geq \frac{r^{\alpha}}{r^{1/\beta}+1}, \end{aligned}$$

d'où suit la convergence vers l'infini quand $r \to \infty$ du terme à droite, ce qui n'aurait pas lieu si le théorème 2.3 était applicable.

Remarque 3. En vu du théorème 2.4 on pourrait penser que la condition suivante et moins restrictive

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \int_{S^1} h^{\alpha+\delta} d\sigma < \infty$$

sera suffisante pour préserver la régularité de queue. Notre exemple montre que ce n'est pas le cas. Réellement, si δ est suffisamment petit,

$$\int_{S^1} h^{\alpha+\delta}(\theta)\sigma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{(\alpha+\delta)\beta-\nu} q_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{(\alpha+\delta)\beta-\nu-2} < \infty.$$

Exemple 3. *Définition de X.* On considère la fonction $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mathbb{1}_{(k,k+1]}(x).$$

Notons son graphe par D_g :

$$D_g = \{(x, y) | y = g(x), x > 0\}.$$

Soit Q une mesure sur $\mathbb{R}_+$ dont la fonction de répartition est définie par

$$F_Q(x) = 1 - G(x) = 1 - 1 \wedge x^{-\alpha}.$$

L'application π de $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\pi : r \mapsto (r, g(r))$$

transforme Q en mesure image $Q\pi^{-1}$ qui sera concentrée sur D_g.

Supposons que X est un v.a. dans $\mathbb{R}^2$ de la loi $\mathbf{P}$ suivante :

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}Q\pi^{-1}(A \cap D_g) + \frac{1}{2}Q(A \cap E), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

où $E = \{(x,0)|x > 0\}$. On vérifie que X satisfait (1.3). Prenons d'abord $B = [a, 2\pi)$, $a \in (0, 2\pi)$. Notons $k_a = \min\{k | \frac{1}{2^k} \leq a\}$, alors

$$((k_a, \infty) \times B) \cap D_g = \emptyset.$$

Donc pour tout $r > k_a$ on a

$$r^\alpha \mathbf{P}\left\{\frac{X}{\|X\|} \in B, \ \|X\| > r\right\} = 0. \tag{2.12}$$

Ensuite, si $B = [0, a)$, pour $\forall r > k_a$

$$\begin{aligned} r^\alpha \mathbf{P}\left\{(r,\infty) \times B\right\} &= r^\alpha \mathbf{P}\{(r,\infty) \times (0,a)) \cup ((r,\infty) \times \{0\}\}) \\ &= r^\alpha(\frac{1}{2}Q\pi^{-1}(((r,\infty) \times (0,a)) \cap D_g) + \frac{1}{2}Q((r,\infty))) \\ &= r^\alpha G(r) = 1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Les relations (2.12), (2.13) donnent (1.1) avec $\sigma = \delta_{\{0\}}$.

Définition de h. On pose $h(x) = \mathbb{1}_{(0,2\pi)}(x)$. Alors l'ensemble des discontinuités de h sera $\{0\}$ et puisque $\sigma(\partial\{0\}) = \sigma(\{0\}) = 1$, la fonction h n'est pas σ-p.p. continue.

Par les arguments analogues aux précédents on trouve que le vecteur $Y = Xh(\frac{X}{\|X\|})$ satisfait la condition de régularité avec la mesure spectrale $\mu = \frac{1}{2}\delta_{\{0\}}$. Par conséquent $d\mu/d\sigma \neq h$.

Si les variables aléatoires $\frac{X}{\|X\|}$ et $\|X\|$ sont indépendantes il y a une condition moins forte sur h telle que la régularité soit préservée sous la transformation.

Théorème 2.4. *Soit X un v.a. dans $\mathbb{R}^d$ satisfaisant la condition (1.1) avec l'exposant α et la mesure spectrale σ, h une fonction définie sur S^{d-1} à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_{S^{d-1}} h^{\alpha+\varepsilon} d\sigma < \infty$ pour un $\varepsilon > 0$. Si les variables $\frac{X}{\|X\|}$ et $\|X\|$ sont indépendantes, alors le vecteur transformé $Y = Xh(\frac{X}{\|X\|}) = (\|X\|h(\frac{X}{\|X\|}), \ \frac{X}{\|X\|})$ vérifie la condition (1.1) avec la mesure spectrale μ telle que $d\mu/d\sigma = h^\alpha$.*

Démonstration: En représentant Y sous la forme $Y = \|X\|Z$, où $Z = \frac{X}{\|X\|}h(\frac{X}{\|X\|})$, on remarque que le résultat suit directement du Th. 4.15 [14]. En connection de ce résultat on peut mentionner [4] (pour $d = 1$) et [6], Lemme 3.9. $\square$

En randomisant la fonction h, on déduit immédiatement du théorème 2.4 le corollaire suivant.

Corollaire 2.5. *Supposons que X satisfait la condition (1.1) avec l'exposant α et la mesure spectrale σ. Soit $\{Z(\theta), \theta \in S^{d-1}\}$ un processus stochastique indépendant de X dont les trajectoires sont presque sûrement positives et σ-p.p. continues. Si pour un $\varepsilon > 0$*

$$\int_{S^{d-1}} \mathbf{E}(Z^{\alpha+\varepsilon}(\theta))\sigma(d\theta) < \infty$$

alors le vecteur $Y = XZ(\frac{X}{\|X\|})$ a la queue régulière de même exposant α que X et de mesure spectrale μ telle que $d\mu/d\sigma = \mathbf{E}(Z(\theta))^\alpha$.

3 Preuves

Démonstration du théorème 2.3 Rappelons que Q_n, Q sont les mesures associées avec X et définies par (1.4) et (1.5). Soit $\tilde{Q}_n$, $\tilde{Q}$ les mesures associées avec le vecteur $Y = Xh(\frac{X}{\|X\|})$ et définies de la même façon, i.e.

$$\tilde{Q}_n((r,\infty) \times B) = n\mathbf{P}\left\{\frac{Y}{\|Y\|} \in B, \|Y\| > rb_n\right\}, \quad \tilde{Q} = m_\alpha \times \mu, \tag{3.14}$$

où $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ et $r > 0$, b_n est le même que dans (1.4). Notons $\mathcal{S}_+$ la famille des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ avec les supports qui sont séparés du point zéro, i.e.

$$\mathcal{S}_+ = \{f|\ \exists\varepsilon > 0 \text{ tel que } supp(f) \subset (\varepsilon,\infty) \times S^{d-1}\}.$$

Pour démontrer le théorème, d'après le théorème de portmanteau, il nous suffit d'établir la convergence

$$\int f d\tilde{Q}_n \to \int f d\tilde{Q}, \quad n \to \infty, \tag{3.15}$$

pour toute $f \in \mathcal{S}_+$ continue et bornée. Définissons l'application φ par

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{R}_+ \times S^{d-1} & \to & \mathbb{R}_+ \times S^{d-1}, \\ (\rho,\theta) & \mapsto & (\rho h(\theta),\theta).\end{array}$$

On remarque que $Y = \varphi(X)$, et

$$Q_n\varphi^{-1}((r,\infty) \times B) = n\mathbf{P}\left\{\frac{Y}{\|Y\|} \in B, \|Y\| > rb_n\right\},$$

$$\begin{aligned} Q\varphi^{-1}((r,\infty)\times B) &= Q\{(\rho,\theta)|\theta\in B, \rho h(\theta)\in(r,\infty)\} \\ &= \int_B\int \mathbb{1}_{(r,\infty)}(\rho h(\theta))m_\alpha(d\rho)\sigma(d\theta) \\ &= \int_B \sigma(d\theta)\alpha\int \mathbb{1}_{(r,\infty)}(\rho h(\theta))\rho^{-\alpha-1}d\rho \\ &= \mu(B)r^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int f d\tilde{Q}_n = \int (f\circ\varphi)dQ_n,$$

$$\int f d\tilde{Q} = \int (f\circ\varphi)dQ.$$

La fonction $f\circ\varphi$ est bornée et Q-p.p. continue grâce à Q-p.p. continuité de φ. De plus, $f\circ\varphi\in\mathcal{S}_+$ puisque h est supposée bornée. En effet si $h\le M$ et $\operatorname{supp}(f)\subset(\varepsilon,\infty)\times S^{d-1}$, alors $\operatorname{supp}(f\circ\varphi)\subset(\varepsilon/M,\infty)\times S^{d-1}$. Car X a la queue régulière de l'exposant α avec la mesure spectrale σ, grâce à la convergence équivalente (1.7), on a pour toute $f\in\mathcal{S}_+$

$$\int (f\circ\varphi)dQ_n \to \int (f\circ\varphi)dQ$$

ce qui donne (3.15). $\square$

Références

[1] Araujo, A. et Giné, E., *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*, Wiley, New York, (1980).

[2] Basrak, B., Davis, R. A. et Mikosch, T., Regular variation of GARCH processes, Stoch., *Proc. Appl.*, V. **99**, 95–116, (2002).

[3] Bingham, N. H., Goldie, C. M. et Teugels, J. L., *Regular Variation*, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

[4] Breiman, L., On Some Limit Theorems Similar to the Arc-Sin Law, *Theory of Probability and its Applications*, V. **10**, 323-331, (1965).

[5] Chambers, J., Mallows, C. et Stuck, B., A method for simulating stable random variables, *Journal of the American Statistical Association*, V. **71**, No.354, 340-344, (1976).

[6] Davydov, Y. et Egorov, V., Functional limit theorems for induced order statistics of a sample from a domain of attraction of α-stable law, $\alpha\in(0,2)$, *Asymptotics in Statistics and Probability : Papers in Honor of George Gregory Roussas*, 85–116, (2000).

[7] Davydov, Y., Molchanov, I. et Zuyev, S., Strictly stable distributions on convex cones, *Electron. J. Probab.*, V. **13**, 259–321, (2008).

[8] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Wiley, New York, (1971).

[9] Jacobsen, M., Mikosch, T., Rosinski, J. et Samorodnitsky, G., Inverse problems for regular variation of linear filters, a cancellation property for σ-finite measures, and identification of stable laws, *Arxiv preprint arXiv :0712.0576*, (2007).

[10] Jessen, A. H. et Mikosch, T., Regularly Varying Functions, *Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle Serie*, tome **80**, No.94, 171-192, (2006).

[11] Mikosch, T., Modeling dependence and tails of financial time series, *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment*, 185–286, (2003).

[12] Modarres, R. et Nolan, J. P., A method for simulating stable random vectors, *Computational Statistics*, V. **9**, 11-19, (1994).

[13] Resnick, S. I., *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer-Verlag, Berlin, (1987).

[14] Resnick, S. I. et Willekens, E., Moving averages with random coefficients and random coefficient autoregressive models, *Communications in statistics. Stochastic models*, V. **7**, 511-525, (1991).

[15] Samorodnitsky, G. et Taqqu, M. S., *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York, (1994).